Terceira prova de Álgebra Linear I

Denis de Assis Pinto Garcia

22 de janeiro de 2024

Exercício 1.

(a) Seja $T \in L(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

em que $B := \big((3,1),(4,2)\big)$. Determine $[T]_{can}$, em que *can* é a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Determine uma matriz inversível $P \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}[T]_{can}P = [T]_B$.

(b) Seja $T \in L(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $T \circ T = 0$. Determine uma matriz inversível $P \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$P^{-1}[T]_{can}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução.

(a) Como

$$[T]_{can} = [I]_{B,can} \cdot [T]_B \cdot \underbrace{[I]_{can,B}}_{=[I]^{-1}_{B,can}} = [I]_{B,can} \cdot [T]_B \cdot [I]^{-1}_{B,can},$$

e como

$$[I]_{B,can} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} [T]_{can} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -20 & 50 \\ -10 & 24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & 25 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso, como $[T]_B$ é uma matriz diagonal, e como

$$[T]_B = \underbrace{[I]_{can,B}}_{=[I]^{-1}_{B,can}} \cdot [T]_{can} \cdot [I]_{B,can} = [I]^{-1}_{B,can} \cdot [T]_{can} \cdot [I]_{B,can},$$

uma tal P é a matriz $[I]_{B,can}$.

(b) Como

$$[T \circ T]_{can} = [T]_{can} \cdot [T]_{can} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$T \circ T = 0$. Para encontrarmos uma matriz inversível P tal que

$$P^{-1}[T]_{can}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

notemos, inicialmente, que encontrar uma tal matriz equivale a encontrar uma base ordenada B de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e que, se $B \coloneqq (v_1, v_2)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$, então $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ se, e somente se,

$$T(v_1) = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = v_2,$$

e

$$T(v_2) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = (0, 0).$$

Como $T \circ T = 0$, é fácil ver, no entanto, que, se v_1 e v_2 em $\mathbb{R}^2$ são tais que $v_2 = T(v_1)$, então, necessariamente,

$$T(v_2) = T\big(T(v_1)\big) = (T \circ T)(v_1) = (0, 0)$$

— a partir do que concluímos, por sua vez, que, se $v_1 \in \mathbb{R}^2$ é tal que $C \coloneqq \big(v_1, T(v_1)\big)$ seja uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$, então $[T]_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sendo assim, como $D \coloneqq \big((1, 0), T(1, 0)\big)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ (pois $\big\{(1, 0), T(1, 0)\big\}$ é LI), podemos concluir que $[T]_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. E, como

$$[T]_D = \underbrace{[I]_{can,D}}_{=[I]^{-1}_{D,can}} \cdot [T]_{can} \cdot [I]_{D,can} = [I]^{-1}_{D,can} \cdot [T]_{can} \cdot [I]_{D,can},$$

disso resulta, por fim, que uma matriz tal como estamos procurando é, justamente, $[I]_{D,can}$, ou, mais explicitamente, $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercício 2.

Verifique se as matrizes A e C, abaixo, são diagonalizáveis. Se a matriz for diagonalizável, determine uma matriz inversível $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1} \cdot (\text{matriz}) \cdot P$ seja diagonal.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação: $p_A(t) = (t-3)^2(t-1)$, e $p_C(t) = (t-1)^2(t-4)$.

Resolução.

(a) Como $p_A(t) = (t-3)^2(t-1)$, $m_a(1) = 1 = m_g(1)$, e $m_a(3) = 2$. Logo, A será diagonalizável se, e somente se, $m_g(3) = 2$. Por sua vez, como

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & -15 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1^{(1)}:=L_2 \\ L_2^{(1)}:=L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -15 \\ -3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_2^{(2)}:=L_2^{(1)}+3L_1^{(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -15 \\ 0 & -9 & -36 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_2^{(3)}:=L_3^{(2)} \\ L_3^{(3)}:=L_2^{(2)}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -15 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -36 \end{bmatrix} \underset{L_3^{(4)}:=L_3^{(3)}+9L_2^{(3)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -15 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

podemos concluir que, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(A - 3I_3) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 3y + 15z, \text{ e } y = -4z.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} V(3) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 3I_3) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y + 15z, \text{ e } y = -4z \big\} \\ &= \big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3z, \text{ e } y = -4z \big\} = \big\{ (3z, -4z, z) : z \in \mathbb{R} \big\} \\ &= \big\{ z(3, -4, 1) : z \in \mathbb{R} \big\} = \big[(3, -4, 1) \big]. \end{aligned}$$

E, como

$$m_g(3) = \dim\big(V(3)\big) = 1 < 2,$$

A não é diagonalizável.[1]

(b) Como $p_C(t) = (t-1)^2(t-4)$, $m_a(4) = 1 = m_g(4)$, e $m_a(1) = 2$. Logo, C será diagonalizável se, e somente se, $m_g(4) = 2$. Por sua vez, como

$$C - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2^{(1)}:=L_2-4L_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} V(1) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (C - I_3) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x \big\} \\ &= \big\{ (x, x, z) : x, z \in \mathbb{R} \big\} = \big\{ x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) : x, z \in \mathbb{R} \big\} = \big[(1, 1, 0), (0, 0, 1) \big]. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$m_g(1) = \dim\big(V(1)\big) = 2,$$

e, por conseguinte, C é diagonalizável.[2]

---

[1] Alternativamente, podemos constatar que A não é diagonalizável observando que, como $A - 3I_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -15 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, posto$(A) = 2$, e, portanto,

$$m_g(3) = \dim\big(V(3)\big) = 3 - \text{posto}(A) = 3 - 2 = 1 < 2.$$

[2] Poderíamos ter chegado à mesma conclusão notando que, como $C - I_3 \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, posto$(C) = 1$, e, consequentemente,

$$m_g(1) = \dim\big(V(1)\big) = 3 - \text{posto}(C) = 3 - 1 = 2.$$

Seja $T_C \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T_C]_{can} = C$. Como $[T_C]_{can} = C$, para encontrarmos uma matriz inversível $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}CP$ seja diagonal, basta encontrarmos uma base ordenada B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T_C]_B$ seja diagonal (pois, se o fizermos, então, como $[T_C]_B = [I]_{can,B} \cdot [T_C]_{can} \cdot [I]_{B,can} = [I]_{B,can}^{-1} \cdot C \cdot [I]_{B,can}$, a matriz $[I]_{B,can}$ será uma tal P). Encontrar uma base ordenada B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T_C]_B$ seja diagonal, por sua vez, é o mesmo que encontrar uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ cujos elementos sejam autovetores de T. Para isso, vamos, inicialmente, encontrar bases de $V(1)$ e de $V(4)$. Como $V(1) = \big[(1,1,0),(0,0,1)\big]$, e como $\big\{(1,1,0),(0,0,1)\big\}$ é LI, $\big\{(1,1,0),(0,0,1)\big\}$ é uma base de $V(1)$. Analogamente, como

$$\begin{aligned} V(4) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (C - 4I_3) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4x, \text{ e } z = 0\big\} = \big\{(x,4x,0) : x \in \mathbb{R}\big\} = \big\{x(1,4,0) : x \in \mathbb{R}\big\} = \big[(1,4,0)\big], \end{aligned}$$

e como $\big\{(1,4,0)\big\}$ é LI, $\big\{(1,4,0)\big\}$ é uma base de $V(4)$. Seja $B \coloneqq \big((1,1,0),(0,0,1),(1,4,0)\big)$. Como $\big\{(1,1,0),(0,0,1)\big\}$ e $\big\{(1,4,0)\big\}$ são bases de $V(1)$ e de $V(4)$, respectivamente, B é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T_C]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Logo, se $P \coloneqq [I]_{B,can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, então P é inversível, e

$$P^{-1}CP = [I]_{B,can}^{-1} \cdot [T_C]_{can} \cdot [I]_{B,can} = [T_C]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3.

As afirmações a seguir são **verdadeiras** ou **falsas**? **Justifique!** Prove as verdadeiras. Se a afirmação for falsa, mostre que ela é falsa.

(a) Sejam $T \in L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3)$ e $S \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5)$. Então nem $S \circ T$ nem $T \circ S$ podem ser injetoras.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ é diagonalizável quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) A matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ é diagonalizável qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

Resolução.

(a) A afirmação é falsa, pois, embora, nesse caso, $S \circ T$ de fato não seja injetora (pois $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$, e $\dim\big(\ker(T)\big) = 5 - \dim\big(\operatorname{Im}(T)\big) \geq 5 - 3 = 2$), $T \circ S$ pode sê-lo. De fato, se

$$\begin{aligned} S \colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^5, \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1, x_2, x_3, 0, 0) \end{aligned}$$

e se

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\longmapsto (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

então $T \circ S \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a aplicação identidade — pois, nesse caso,

$$(T \circ S)(x_1, x_2, x_3) = T\big(S(x_1, x_2, x_3)\big) = T(x_1, x_2, x_3, 0, 0) = (x_1, x_2, x_3)$$

qualquer que seja $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ — e, portanto, é injetora.

(b) A afirmação é verdadeira. Para constatar isso, fixemos a e b em $\mathbb{R}$ de modo arbitrário e vamos mostrar que a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ é diagonalizável. Para tanto, notemos, inicialmente, que, como

$$(-1)^2 \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & a-t \end{bmatrix} = (a-t)^2 - b^2 = (t-a)^2 - b^2 = \big(t-a-|b|\big)\big(t-a+|b|\big),$$

o polinômio característico da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ é $\big(t-a-|b|\big)\big(t-a+|b|\big)$. Disso resulta que, se $b \neq 0$, essa matriz possui dois autovalores distintos (a saber, $a+|b|$ e $a-|b|$) e, portanto, é diagonalizável. Sendo assim, para concluirmos a demonstração, basta analisarmos o caso em que $b=0$. Nesse caso, contudo, a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ é diagonalizável porque é diagonal.[3]

(c) A afirmação é falsa.[4] Isso porque, se a e b em $\mathbb{R}$ são tais que $a+b=0$, e $a \neq 0$, então

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e, por conseguinte, nesse caso, as matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não são semelhantes — já que, como

$$P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

qualquer que seja a matriz inversível $P \in M_2(\mathbb{R})$, a única matriz em $M_2(\mathbb{R})$ que é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é ela própria.

(d) A afirmação é falsa.[5] De fato, é fácil ver que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável (pois, se fosse, então, como 1 é seu único autovalor, ela deveria ser semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e, como

$$P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P = P^{-1} \cdot P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qualquer que seja a matriz inversível $P \in M_2(\mathbb{R})$, a única matriz em $M_2(\mathbb{R})$ que é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é ela própria.

[3] Com efeito, se $b=0$, então $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

[4] Pode-se mostrar, no entanto, que, se a e b em $\mathbb{R}$ são tais que $a+b \neq 0$ ou $a=b=0$, então as matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são semelhantes.

[5] Apesar disso, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ é diagonalizável qualquer que seja a em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (já que, para cada a em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, essa matriz possui dois autovalores distintos).