Questão 4. **(3,0 pontos)** Calcule a integral de linha $\int_\gamma (2xe^y - xy)\,d\,x + (x^2e^y + \operatorname{sen} 3y^2)\,d\,y$, sendo γ a elipse $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$, percorrida uma vez no sentido antihorário.

$$\gamma(t) = (1 + 2\cos t\,,\ \sin t)$$

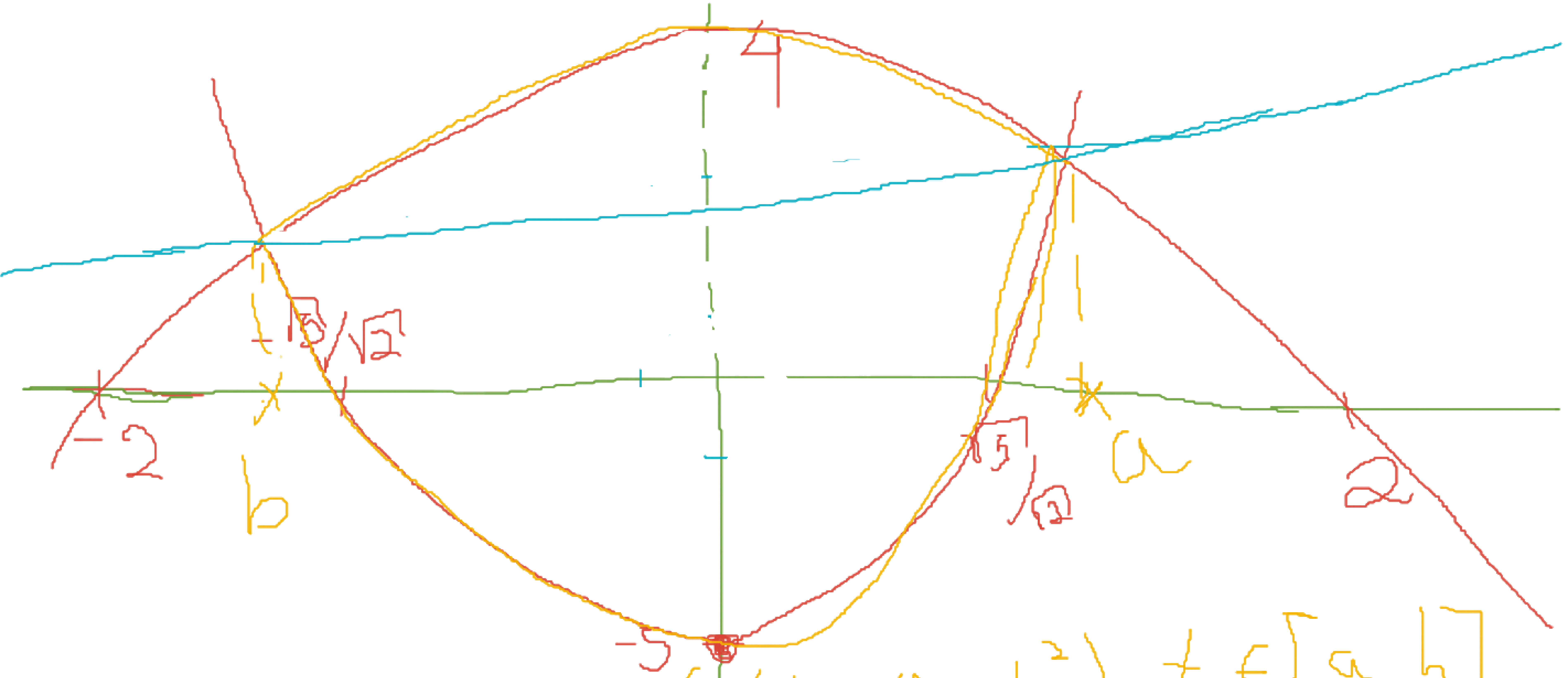
Questão 1. **(3 pontos)** Calcule as seguintes integrais de linha

a) $\displaystyle\int_\gamma 2x\,d\,x - y^2\,d\,y + \left[\cos(x+y^2)+3z^2\right]\,d\,z$, sendo γ a interseção da esfera de raio $\sqrt{13}$, centrada no ponto $(0,0,1)$ com o plano $z=3$, orientada de modo que a projeção no plano Oxy seja percorrida no sentido antihorário.

b) $\displaystyle\int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}$, sendo γ a fronteira da região limitada pelas parábolas s $y=2x^2-5$ e $y=4-x^2$, com orientação horária.

$$\theta(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$\int_\gamma F\,dr = \varphi(f) - \varphi(i) \qquad -\frac{\pi}{2}$$



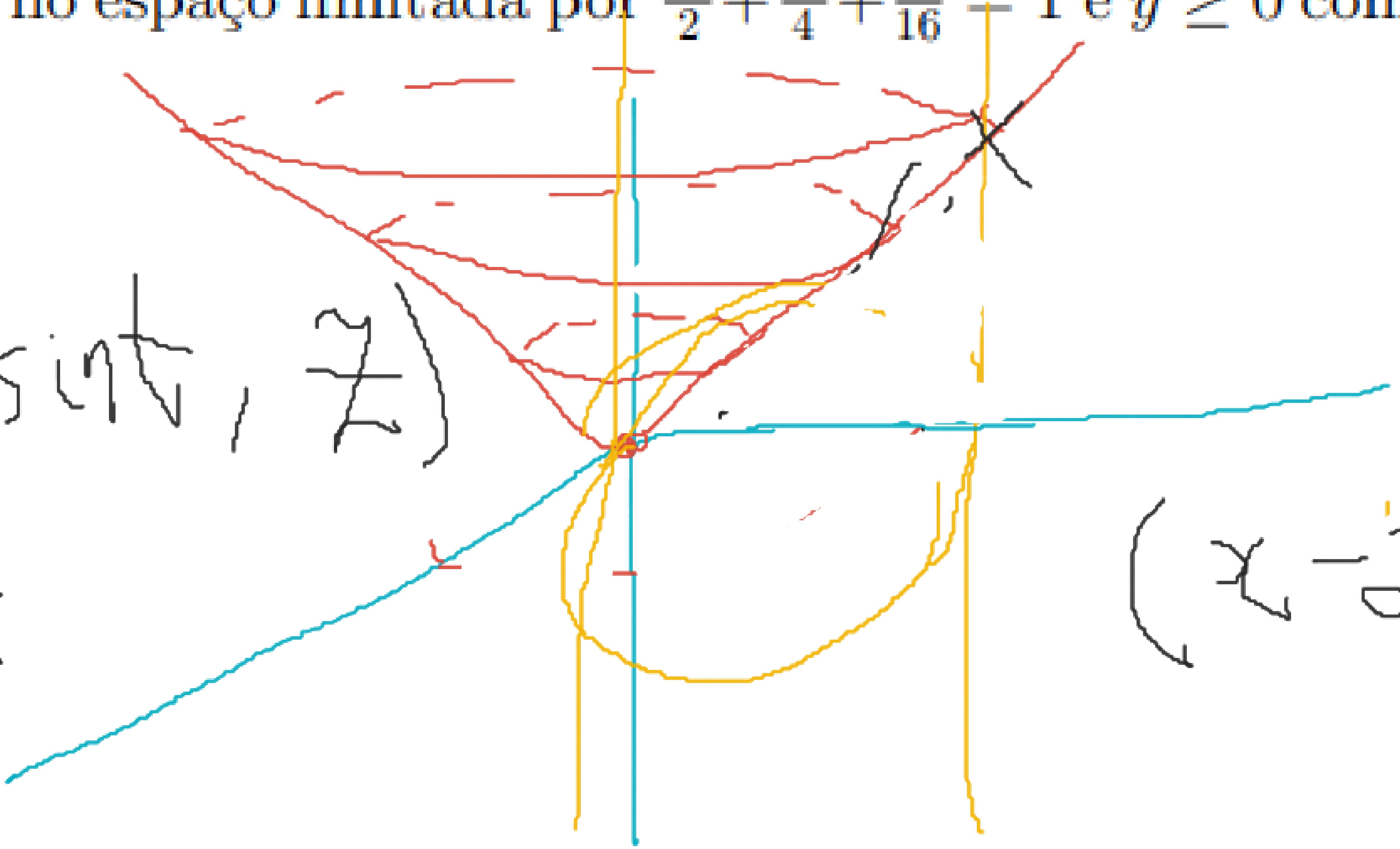
$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 4 - t^2), & t \in [a, b] \\ (t - (b+a) \quad {}^2 - 5), & t \in [b, b + b - a] \end{cases}$$

$$\delta(x,y)$$

$$m = \iint \delta \, dx\,dy$$

Questão 3. **(4 pontos)** Calcule a massa da região E, com densidade $\delta(x, y, z)$ dada. a) E é a região no espaço limitada por $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4x$ e $z = 0$ com $\delta(x, y, z) = |y|$.

b) E é a região no espaço limitada por $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ e $y \geq 0$ com $\delta(x, y, z) = 2$.



$y^2 = 4x - x^2$

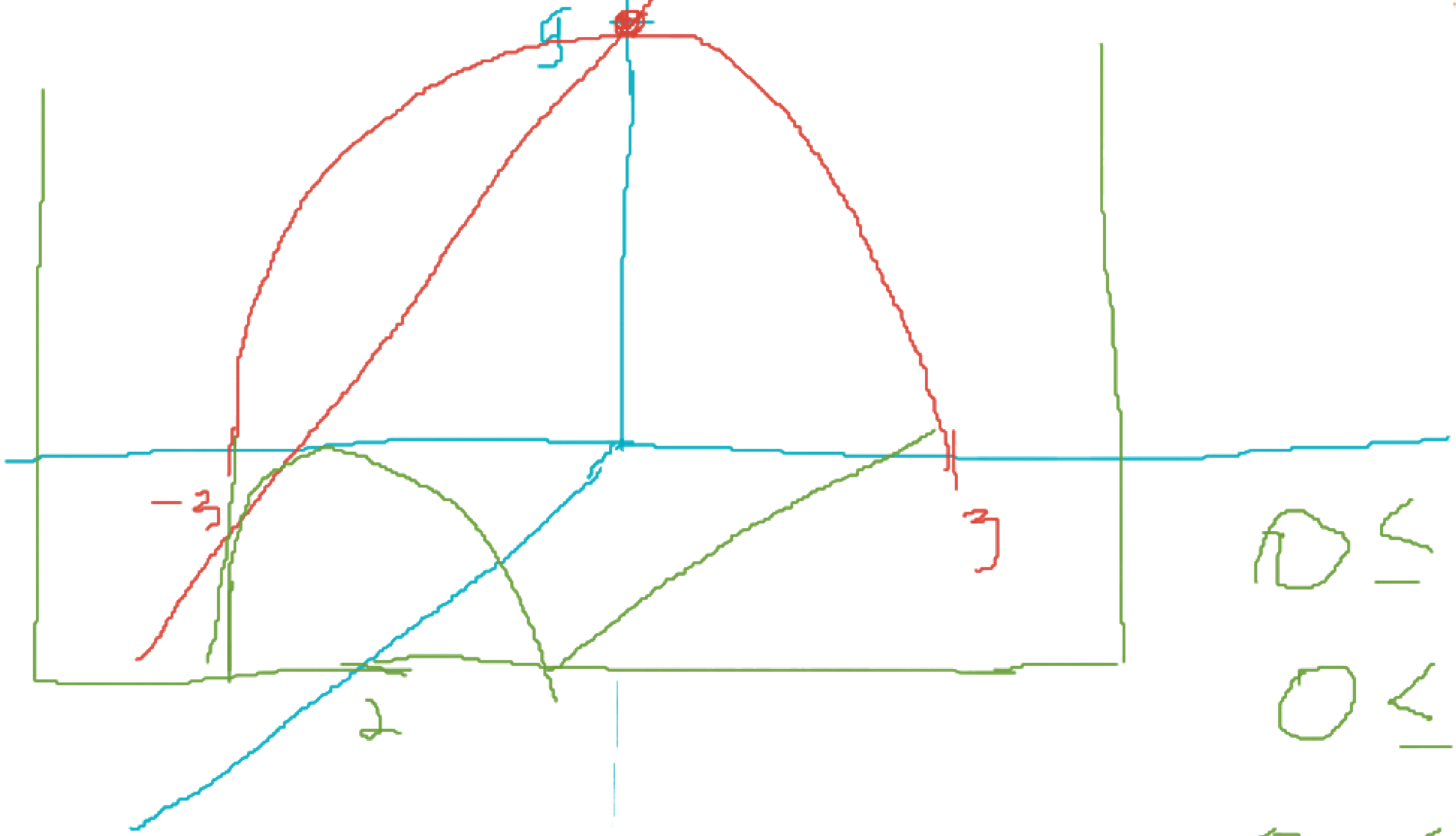
$(r\cos t, r\sin t, z)$

$2r\cos t$

$(x-2)^2 + y^2 = 4$

3. (a) Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado por $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$. Resp. 36.

(b) Uma piscina tem formato circular de raio 3m e profundidade variando linearmente de sul a norte, sendo que no extremo sul é de 1m e no extremo norte é de 2m. Calcule o volume da piscina. Resp. $\frac{27\pi}{2}$



$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq y \leq 3$

$0 \leq z \leq 9 - y^2$

3. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

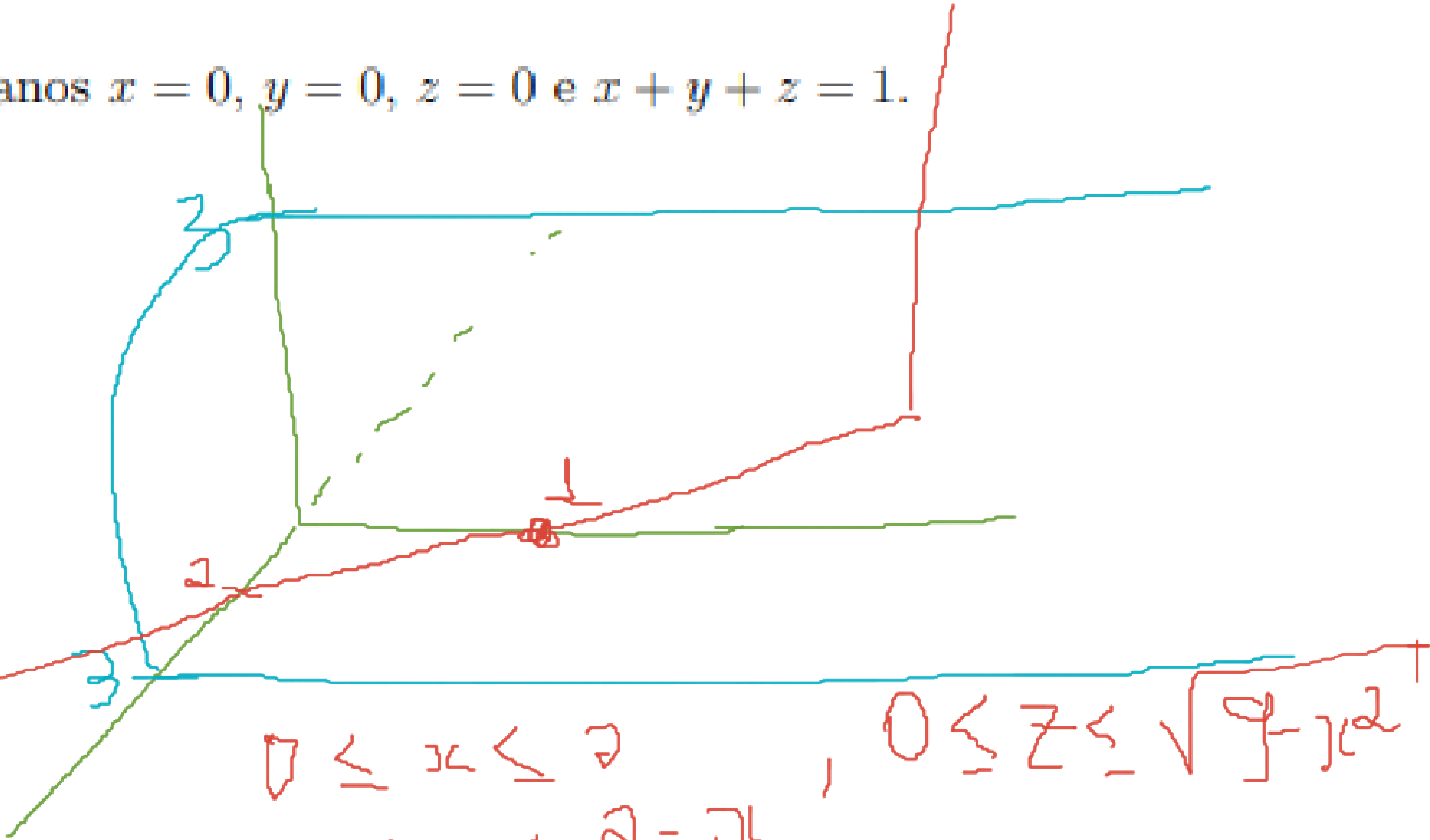
(a) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelo plano $x + 2y = 2$.

(b) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

$y = \frac{2-x}{2}$

$x^2 + z^2 = 9$

$z = \sqrt{9-x^2}$



$0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2}$

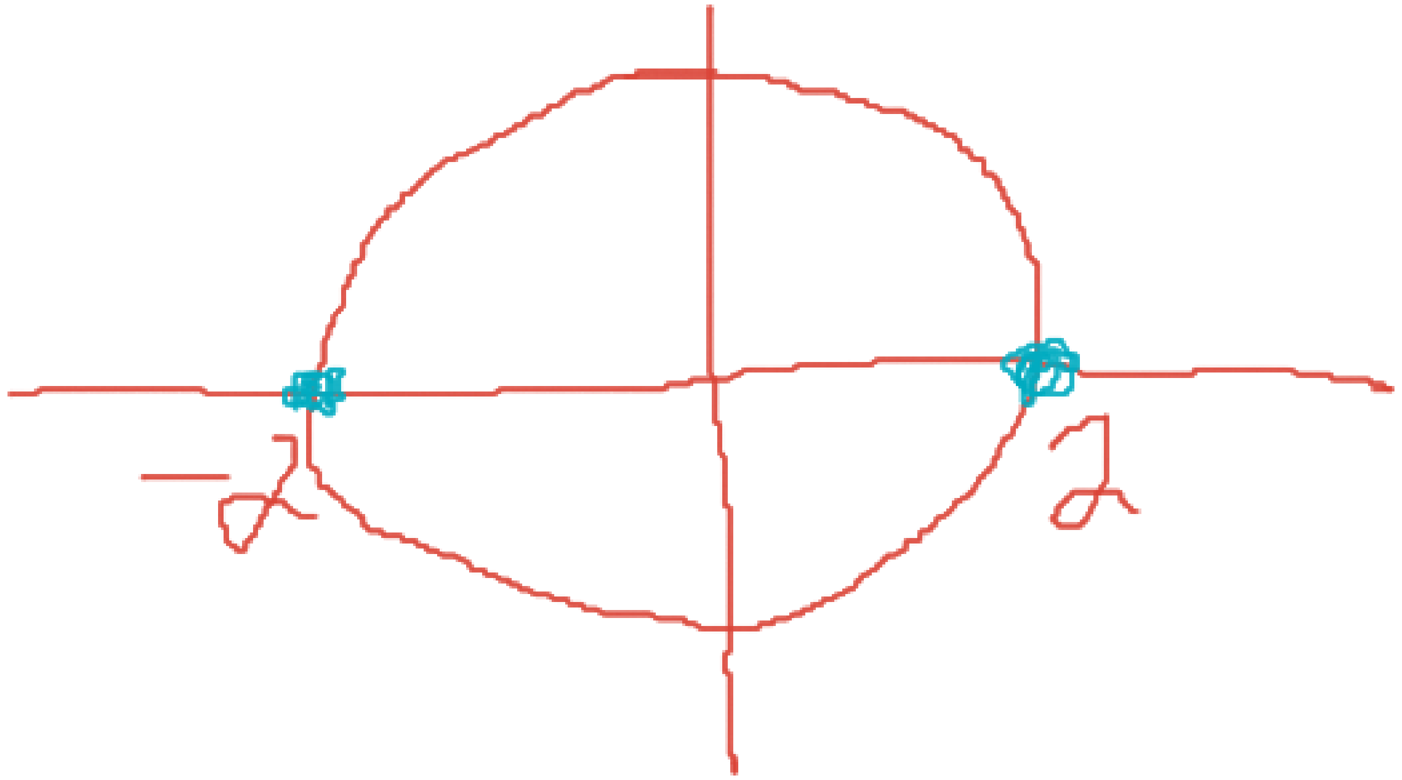
$0 \leq y \leq \frac{2-x}{2}$

3. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para

(a) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$, onde γ é o arco de circunferência $\gamma(x) = (x, \sqrt{4 - x^2})$, ligando $(-2, 0)$ a $(2, 0)$.

Resp. 2π.

$$\int_\gamma F\,dr = \int$$

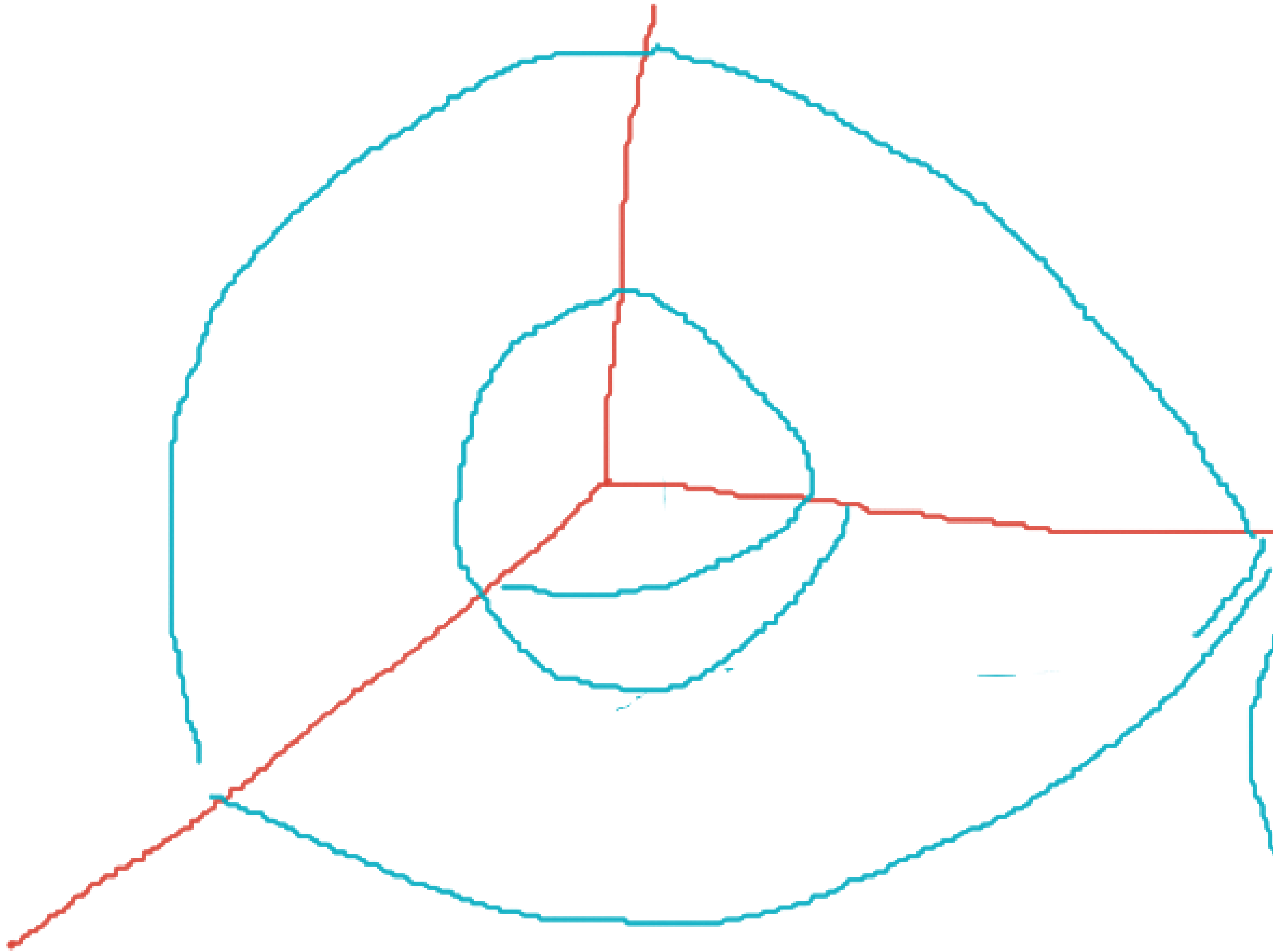


$$x^2 + y^2 = 4$$

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$$

Questão 3. **(2 pontos)** Calcule a integral $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, sendo $W \subset \mathbb{R}^3$ a região do espaço limitada pelas esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $x^2+y^2+z^2=2a^2$, onde $a>0$.

$= (a\sqrt{2})^2$

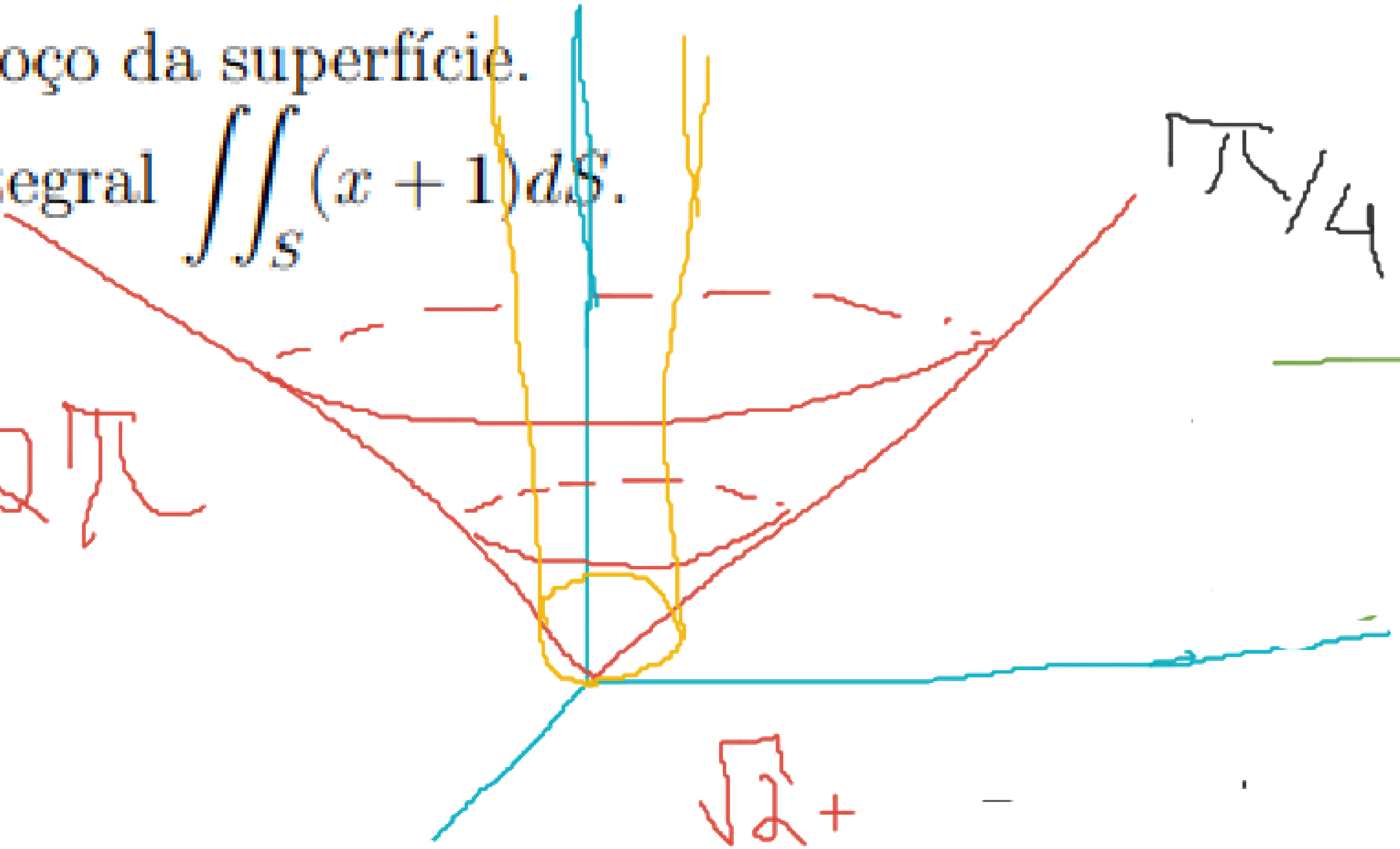


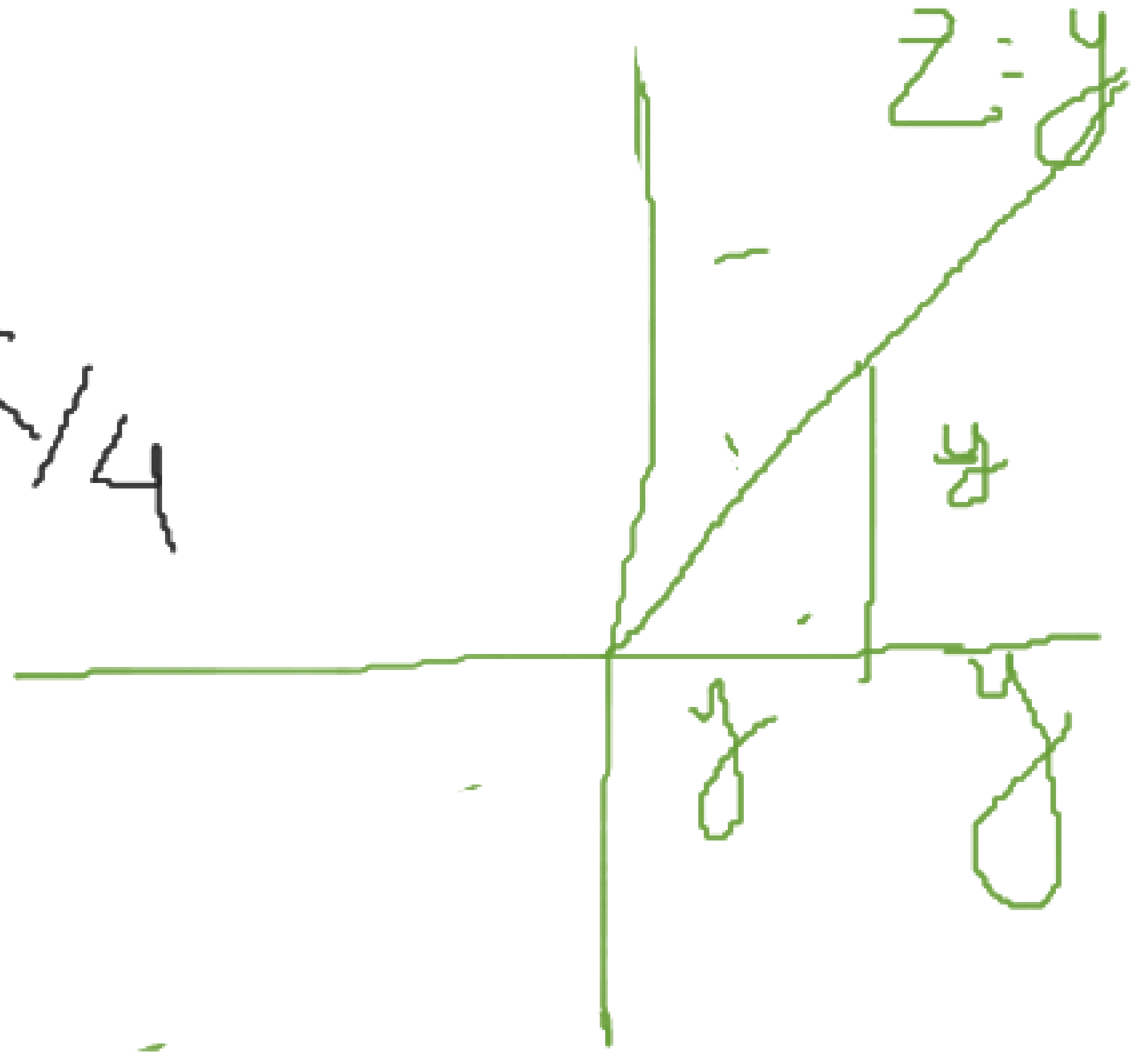
$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{a\sqrt{2}} \frac{\sin\varphi}{\rho}$$

Questão 3. **(3,0 pontos)** Seja S a parte da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por $x^2 + y^2 = 2y$.

a) Faça um esboço da superfície.

b) Calcule a integral $\iint_S (x+1)\,dS$.





$0 \leq \theta \leq 2\pi$

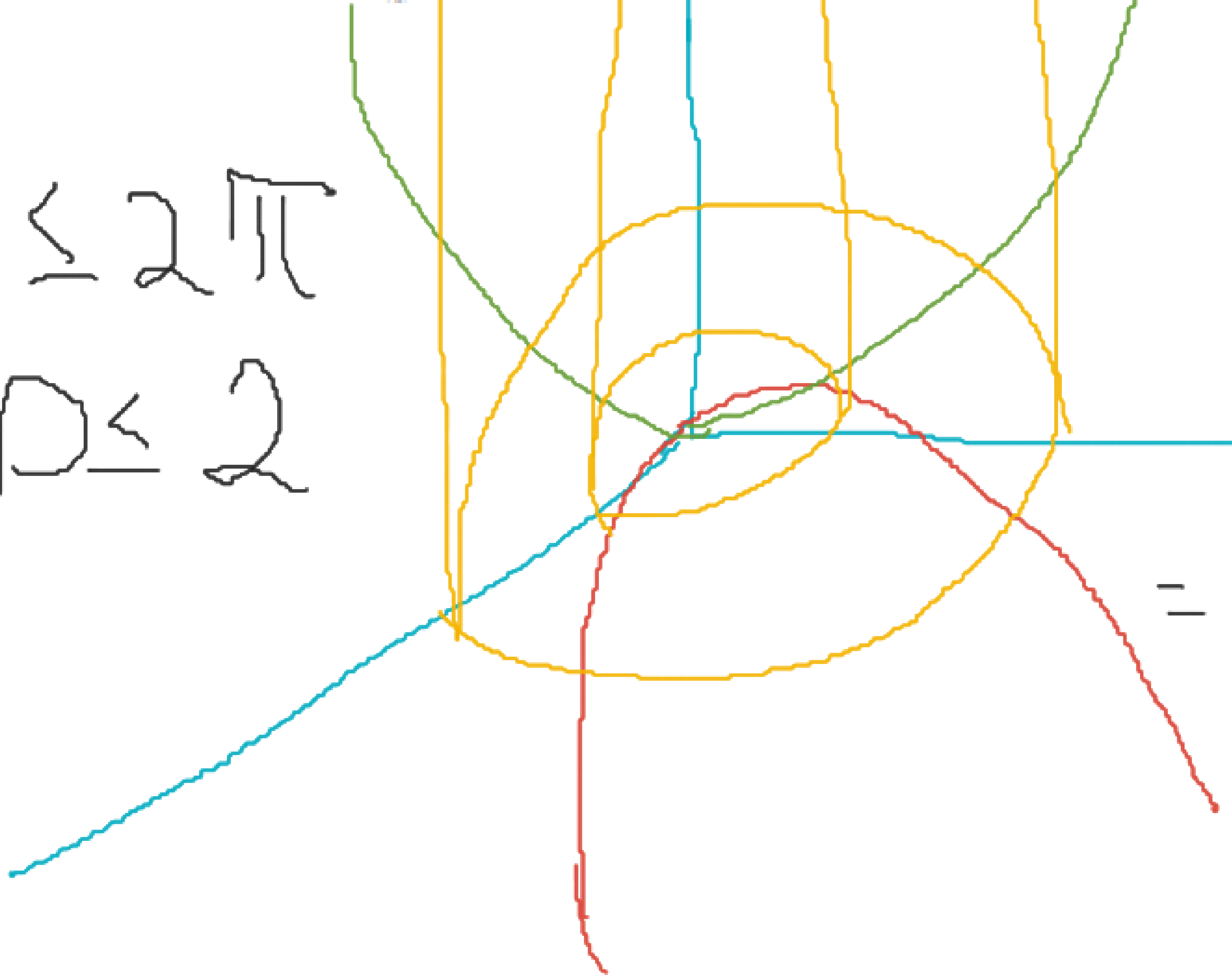
$\sqrt{2} +$

$\left(\rho\cos\theta\sin\frac{\pi}{4},\ \rho\sin\theta\sin\frac{\pi}{4},\ \rho\cos\frac{\pi}{4}\right.$

Questão 4. **(3 pontos)** A superfície S é a parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

a) Encontre uma parametrização para S, explicitando seu domínio.

b) Calcule a integral $\iint_S 3\, dS$.



$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$1 \leq \rho \leq 2$

$(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, \rho^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta))$

$= (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, -\rho^2 \cos 2\theta)$