Exercício 2 da sétima lista de Álgebra Linear I

Denis de Assis Pinto Garcia

7 de janeiro de 2024

Exercício 2.

Seja $V \coloneqq C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $T \in L(V)$ tal que, para cada $f \in V$ e cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\big[T(f)\big](x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

não tem autovalores.

Resolução.

Suponhamos, por absurdo, que $\lambda \in \mathbb{R}$ seja um autovalor de T, e que $f \in V \setminus \{0_V\}$ seja um autovetor de T associado a λ. Nesse caso,

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lambda f(x)$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Vamos, inicialmente, analisar o caso em que $\lambda = 0$. Nessa situação,

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, e, portanto, resulta da continuidade de f e do teorema fundamental do Cálculo que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ — o que, por sua vez, é um absurdo, pois, como f é um autovetor de T, $f \neq 0_V$.

Suponhamos, agora, que $\lambda \neq 0$. Nesse caso,

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, e, por conseguinte, decorre, mais uma vez, da continuidade de f e do teorema fundamental do Cálculo que f é, na verdade, derivável, e que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda}f(x).$$

Sendo assim, como, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)e^{-\frac{1}{\lambda}x}\right]\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)e^{-\frac{1}{\lambda}x_0} - \underbrace{\frac{1}{\lambda}f(x_0)}_{=f'(x_0)}e^{-\frac{1}{\lambda}x_0} = 0,$$

podemos concluir que $f(x)e^{-\frac{1}{\lambda}x} = f(0)e^{-\frac{1}{\lambda}0}$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, ou, equivalentemente, que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)e^{\frac{1}{\lambda}x}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(0)e^{\frac{1}{\lambda}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left[\lambda f(0)e^{\frac{1}{\lambda}t}\right]_0^x \\ &= \underbrace{f(0)e^{\frac{1}{\lambda}x}}_{=f(x)} - f(0) = f(x) - f(0) \end{aligned}$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, e, portanto, $f(0) = 0$ — a partir do que concluímos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)e^{\frac{1}{\lambda}x} = 0$. Isso, porém, também é um absurdo, pois, por hipótese, $f \neq 0_V$. Logo, T não possui autovalores.