Plantão de Dúvidas do dia 5 de Janeiro

Teorema.

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, e se $T: V \to V$ é um operador linear, então T é diagonalizável se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) o polinômio característico de T não possui raízes complexas não reais; e

(ii) as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor de T são iguais.

Exercício.

As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas?

a) Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita, e se $T: V \to W$ é uma transformação linear injetora, então ela é também sobrejetora.

b) Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita, e se $T: V \to W$ é uma transformação linear sobrejetora, então ela é também injetora.

c) Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita e de mesma dimensão, e se $T: V \to W$ é linear, então T é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são tais que A é invertível, e A é semelhante a B, então B também é invertível.

Resolução.

a) A afirmação é falsa. De fato,

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

é injetora, mas não é sobrejetora.

b) A afirmação é falsa. Com efeito,

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

é sobrejetora, mas não é injetora.

c) A afirmação é verdadeira, e sua demonstração fica como exercício para vocês. DICA: lembrem-se do teorema do núcleo e da imagem.

d) A afirmação é verdadeira, pois, se A tem inversa, e se $P \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível tal que $B = P^{-1}AP$, então

$$(P^{-1}A^{-1}P)B = P^{-1}A^{-1}\underbrace{PP^{-1}}_{=I_n}AP = P^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}P = \underbrace{P^{-1}P}_{=I_n} = I_n,$$

e

$$B(P^{-1}A^{-1}P) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_n}A^{-1}P = P^{-1}\underbrace{AA^{-1}}_{=I_n}P = \underbrace{P^{-1}P}_{=I_n} = I_n.$$

LISTA 7

6) Seja $T_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $[T_A]_{can} = A$. Como

$$P_{T_A}(t) = (-1)^3 \det \begin{bmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 1 & 2-t & 3 \\ 1 & 2 & 3-t \end{bmatrix}$$

$$= -\left[(1-t)\left((2-t)(3-t)-6\right) - 2\left(3-t-3\right) + 3\left(2+t-2\right)\right]$$

$$= -\left[(1-t)(+t^2-5t) + 2t + 3t\right]$$

$$= -\left[+t^2-5t-t^3+5t^2+5t\right]$$

$$= -\left[-t^3+6t^2\right]$$

$$= t^3-6t^2$$

$$= t^2(t-6),$$

Os autovalores de T_A são 0 e 6. Além disso, $m_a(6) = 1 = m_g(6)$, e $m_a(0) = 2$. Por sua vez, como

$$\begin{aligned}
Ker(T_A) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y - 3z\} \\
&= \{(-2y-3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(-2,1,0) + z(-3,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= [(-2,1,0), (-3,0,1)],
\end{aligned}$$

resulta do fato de que $\{(-2,1,0), (-3,0,1)\}$ é LI que $m_g(0) = \dim(Ker(T_A)) = 2 = m_a(0)$. Logo, T_A é diagonalizável, e existe uma base ordenada C de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T_A]_C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Por sua vez, é fácil ver que, se C é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T_A]_C = B$, então

$$B = [T_A]_C = [I \circ T_A \circ I]_C = [I]_{can,C}[T_A]_{can}[I]_{C,can} = [I]^{-1}_{C,can} A [I]_{C,can}.$$

Portanto, A e B são semelhantes.

LISTA 6

12)

a) Verdadeira, pois $Im(S \circ T) \subseteq Im(S)$ (e, portanto, se $Im(S \circ T) = U$, então, como $U = Im(S \circ T) \subseteq Im(S) \subseteq U$, $Im(S) = U$).

b) Falsa, pois, se

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2, \\ x &\mapsto (x,0) \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} S: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x,y) &\mapsto x \end{aligned}$$

então $S \circ T = I_{\mathbb{R}}$ (e, portanto, $S \circ T$ é bijetora), mas T não é sobrejetora.

c) Falsa, e o exemplo dado no item anterior mostra isso.

d) Verdadeira, pois $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$ (e, portanto, se $\ker(S \circ T) = \{0_U\}$, então, como $\{0_U\} \subseteq \ker(T) \subseteq \ker(S \circ T) = \{0_U\}$, $\ker(T) = \{0_U\}$).