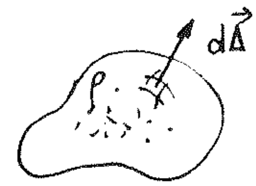
As Leis Básicas do Eletromagnetismo e as Equações de Maxwell

R. Galvão

Nós iniciamos o curso estudando campos eletrostáticos. Vimos que as fontes do campo eletrostático são cargas elétricas. Para uma distribuição de cargas o campo eletrostático pode ser calculado a partir da Lei de Coulomb ou da Lei de Gauss, que são equivalentes. As cargas elétricas são fontes monopolares do campo eletrostático, ou seja, as linhas de força do campo eletrostático se originam ou terminam em cargas elétricas. Em resumo, o campo eletrostático é determinado pela lei básica

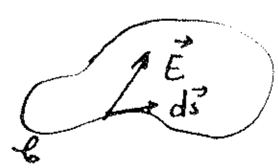
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1)$$



onde S é uma superfície fechada e $q = \int_V \rho \, dV$ é a carga total contida dentro da superfície.

O campo eletrostático tem uma propriedade importante: é um campo conservativo, ou seja, a circuitação do campo eletrostático num percurso fechado é nula

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$



Nós mostramos que isto implica que o campo eletrostático pode ser obtido a partir de uma função escalar, o potencial escalar $V(x,y,z)$, através da relação

$$\vec{E} = -\nabla V$$

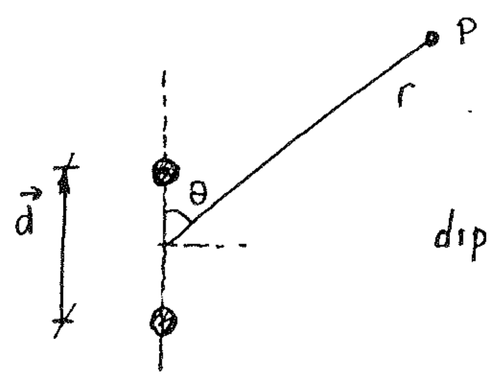
onde ∇ é o operador diferencial definido como

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

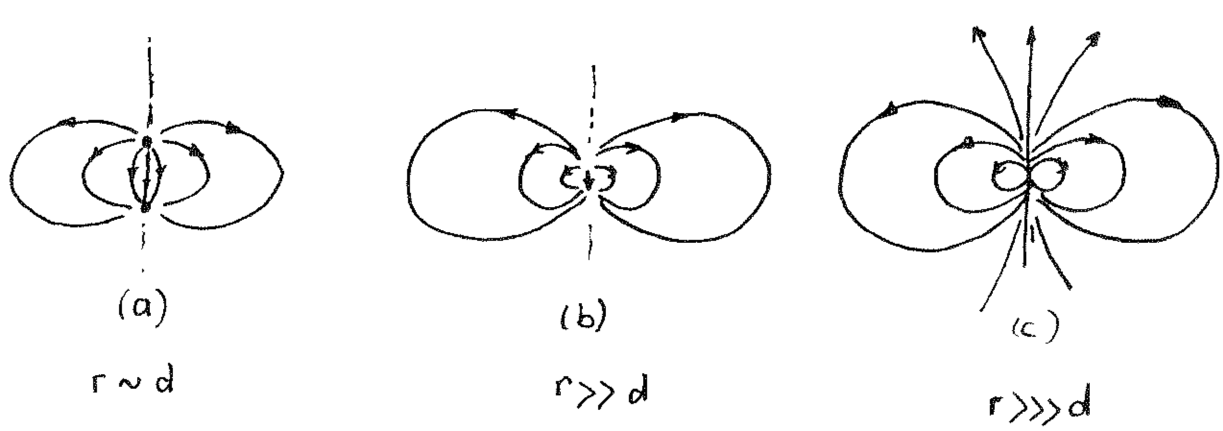
Portanto o campo eletrostático é oposto ao gradiente do potencial eletrostático, ou seja, ele aponta na direção de máximo decréscimo do potencial eletrostático.

A seguir nós discutimos o campo magnetostático. Vimos que este campo não é produzido por fontes monopolares. As fontes do campo magnetostático são <u>correntes estacionárias</u>. Como as correntes estacionárias tem que sempre se fechar sobre sí mesmas, a fonte mais elementar do campo magnetostático é uma espira de corrente. Uma espira de corrente é chamada um <u>dipolo magnético</u> e talvez seja útil discutir um pouco mais a razão deste nome, qualitativamente.

Na figura abaixo é mostrado um dipolo elétrico e as linhas de força do campo eletrostático por êle produzido, para distancias progressivamente maiores que a dimensão do dipolo.



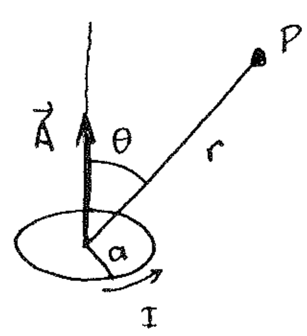
dipolo elétrico : $\vec{p} = q\vec{d}$



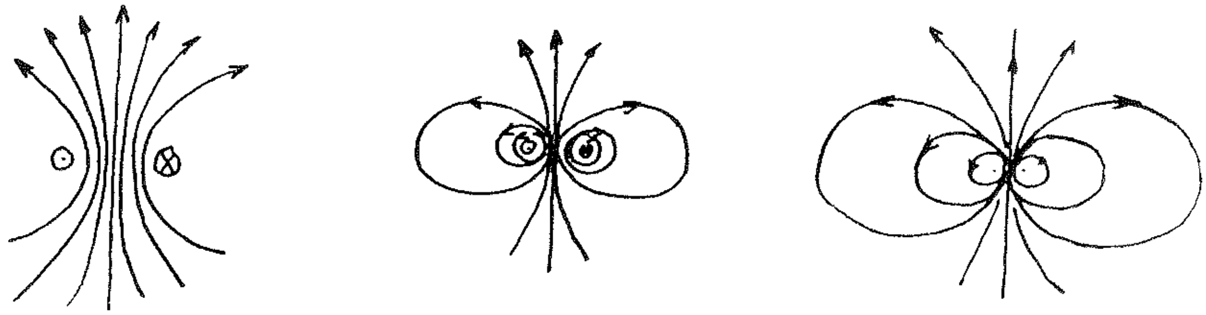
As linhas de força do campo eletrostático sempre se originam na carga positiva e terminam na carga negativa. À medida que nos afastamos do dipolo, $r \gg\gg d$, as cargas positiva e negativa se tornam indistinguíveis e as linhas de força externas parecem percorrer um circuito fechado, passando todas pela origem onde se localiza o dipolo (figura c).

Consideremos agora o campo magnetostático produzido por uma espira circular de corrente. [Em aula nós calculamos a expressão do campo somente ao longo do eixo da espira. Mas é possível calcular analiticamente a expressão do campo em todo o espaço. O cálculo envolve integrais elípticas, que fazem parte de um curso avançado de Métodos Matemáticos, e por isso não é feito no curso de Física Básica].

Na figura abaixo é mostrado um dipolo magnético (a espira de corrente) e as linhas de força do campo magnetostático por êle produzido, para distancias progressivamente maiores que o diametro da espira.



dipolo magnético: $\vec{\mu} = I\vec{A}$; $A = \pi a^2$



(a) $r \sim a$ (b) $r \gg a$ (c) $r \gg\gg a$

Vemos que, ao contrário do campo eletrostático, as linhas de força do campo magnetostático nunca começam ou terminam em cargas 'magnéticas' puntiformes. Elas sempre se fecham sobre si mesmas ou se deslocam para o infinito. No entanto, quando tomamos o limite $r \gg a$, a forma das linhas de força do campo produzido pela espira de corrente é a mesma da do campo eletrostático produzido pelo dipolo elétrico. Partindo da expressão geral destes campos, podemos demonstrar que nos limites $r \gg d$ e $r \gg a$ obtemos para ambos a mesma dependência em r e θ. Isto é basicamente a razão para denominar uma espira elementar de corrente um <u>dipolo magnético</u>.

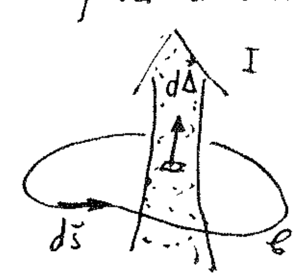
Como as linhas de força do campo magnético não possuem 'origens' ou 'sumidouros', se calcularmos o fluxo do campo magnético através de uma superfície fechada encontramos sempre um resultado nulo. Portanto o equivalente da Lei de Gauss para o campo magnetostático é

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad (2)$$

(Veja também discussão na Seção ~~30.7~~ 3.9 do livro texto)

Por outro lado, sabemos que o campo magnético produzido por correntes estacionárias pode ser calculado pela <u>Lei de Biot-Savart</u> ou pela <u>Lei de Ampère</u>, que são equivalentes. Assim o campo magnetostático produzido por correntes estacionárias fica determinado pela lei básica

$$\oint_\ell \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (3)$$

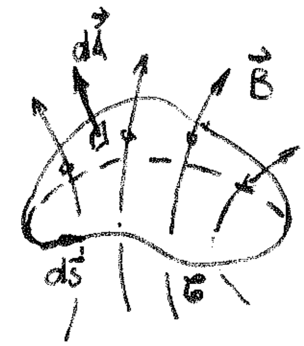


onde

$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$ é a corrente total enlaçada pelo contorno $\mathcal{C}$.

Finalmente vimos que se o fluxo magnético através de qualquer superfície aberta delimitada pelo contorno fechado $\mathcal{C}$ variar com o tempo, aparece um campo elétrico cuja circuitação, denominada <u>força eletromotriz</u>, não é nula, como no caso do campo eletrostático, mas sim dada por

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad (4)$$



Esta é a <u>Lei de Faraday</u> (lembre-se da regra da mão direita na escolha dos sentidos relativos de $d\vec{s}$ e $d\vec{A}$).

As leis de Ampère e Faraday, dadas pelas equações (3) e (4), respectivamente, parecem apresentar uma assimetria física. Pela Lei de Faraday, se um campo magnético variar com o tempo, é induzido um campo elétrico. No entanto, pela Lei de Ampère, o campo magnético só é produzido por correntes; não há 'indução' de campo magnético por campos elétricos variáveis no tempo. Esta assimetria foi percebida por <u>Maxwell</u>. Como vimos no capítulo 6° do livro texto (seção 4), êle propôs que ~~quando~~ um novo termo fosse acrescentado como fonte na Lei de Ampère, para que a continuidade de corrente fosse garantida, em situações em que a corrente de ~~deslocamento~~ condução é interrompida, como no caso da carga e descarga de um capacitor. Este novo termo recebeu o nome de <u>Corrente de Deslocamento</u>, e é dada por

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (5)$$

onde o fluxo elétrico $\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$ é calculado através da qualquer superfície aberta S

delimitada pelo mesmo contorno $\mathcal{C}$ para o qual está sendo aplicada a Lei de Ampère. Com a corrente de deslocamento incluída na Lei de Ampère, ficam completas as equações básicas do eletromagnetismo, que permitem calcular os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$, a partir de suas fontes, densidade de carga ρ e densidade de corrente $\vec{j}$. Estas equações são denominadas <u>Equações de Maxwell</u>, na forma integral...

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \;;\; \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad (6)$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi_m}{dt} \;;\; \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}, \qquad (7)$$

onde

$$q = \int_V \rho\, dV \;;\; I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{A} \;;\; \phi_m = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} \;;\; \phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}\,.$$

Embora as equações acima permitam calcular de forma consistente os campos eletromagnéticos, em aplicações práticas não são muito convenientes porque relacionam os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ entre si e às suas fontes através de relações integrais. É sempre preciso fazer uma integral de linha, de área ou de volume para determinar os campos. Seria mais interessante ter uma versão '<u>local</u>' das mesmas equações, ou seja, relações entre os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ num ponto qualquer do espaço e suas fontes $\rho(\vec{r},t)$ e $\vec{j}(\vec{r},t)$ no mesmo ponto. Estas relações podem ser obtidas através de dois teoremas básicos para campos vetoriais, os teoremas de <u>Gauss e Stokes</u>, que são vistos em Cálculo III. Mesmo assim, para completeza, vamos 'recordar' estes teoremas usando os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ como exemplos concretos.

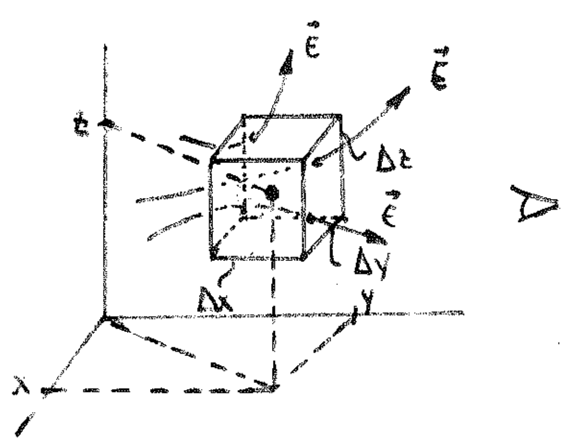
Limite Local da Lei de Gauss

Suponhamos que tenhamos uma distribuição contínua de cargas, $\rho(\vec{r})$, e que queiramos aplicar a Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

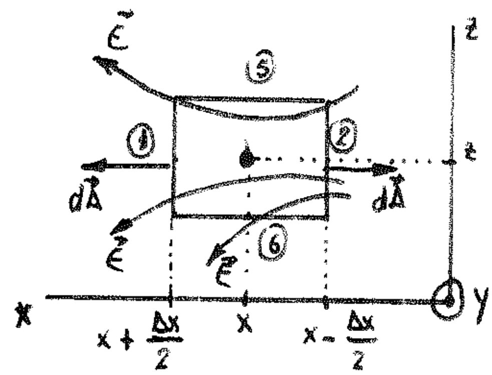
para um volume V que fasamos tender a zero; o que acontece no limite $V \to 0$? Naturalmente, a resposta simplista é que se o volume é nulo, a carga dentro dêle também é nula e a superfície S que o encerra também é nula; portanto a Lei de Gauss parece se reduzir à identidade $0 = 0$ neste limite!. Mas, como sabemos do Curso de Cálculo, é preciso tomar cuidado com este tipo de limite porque, em alguns casos, a indeterminação pode ser levantada, isto é, ambos os lados da equação podem estar multiplicados por um mesmo fator que tende a zero. Cancelando este fator antes de tomar o limite, obtemos um resultado não trivial que permanece válido!. É exatamente isto que acontece com a Lei de Gauss, como veremos a seguir.

Para facilitar o cálculo, vamos considerar nosso volume elementar V como sendo um paralelepípedo de lados $\Delta x, \Delta y$ e Δz, centrado no ponto (x, y, z) dentro da região com distribuição de carga $\rho(\vec{r}) = \rho(x,y,z)$. Para aplicar a Lei de Gauss, vamos calcular o fluxo de $\vec{E}$ através das superfícies e depois tomar o limite $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ e $\Delta z \to 0$.



O ponto (x,y,z) está no centro do volume elementar, de forma que este se estende de $\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)$ a $\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$, $\left(y-\frac{\Delta y}{2}\right)$ a $\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)$ e $\left(z-\frac{\Delta z}{2}\right)$ a $\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)$. Por outro lado, é importante notar que, como $\vec{E}(x,y,z)$ varia com a posição, os fluxos através de faces opostas podem ser diferentes e, portanto, é necessário considerar esta diferença antes de tomar os limites!.

Inicialmente, vamos considerar as faces ① e ② paralelas ao plano yz. Como mostra a figura ao lado, que corresponde a uma projeção no plano xz, a face ① está no ponto $x+\frac{\Delta x}{2}$ e, para ela, $d\vec{A} = dydz\,\hat{e}_x$ ($d\vec{A}$ sempre apontando para fora do volume). Já a face ② está no ponto $x-\frac{\Delta x}{2}$ e, para ela, $d\vec{A} = -dydz\,\hat{e}_x$. Então temos



$$\int_{①} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{②} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{①} dy \int dz\, E_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - \int_{②} dy \int dz\, E_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right),$$

onde $E_x\left(x\pm\frac{\Delta x}{2}\right)$ significa a componente E_x calculada no ponto $x\pm\frac{\Delta x}{2}$. Como as superfícies são elementares, podemos aproximar as integrais

$$\int_{①} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{②} \vec{E}\cdot d\vec{A} \approx \left[E_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - E_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\Delta y\,\Delta z$$

Da mesma, se fizermos o mesmo cálculo para as faces ③ e ④, paralelas ao plano xz, e ⑤ e ⑥, paralelas ao plano xy, obtemos

$$\int_{③} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{④} \vec{E}\cdot d\vec{A} \approx \left[E_y\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right) - E_y\left(y-\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta x\,\Delta z$$

e

$$\int_{⑥} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{⑥} \vec{E}\cdot d\vec{A} \approx \left[E_z\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right) - E_z\left(z-\frac{\Delta z}{2}\right) \right] \Delta x\, \Delta y$$

Portanto, o fluxo resultante do campo elétrico através das seis faces deste volume elementar é dado por

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} \approx \left[\frac{E_x(x+\frac{\Delta x}{2}) - E_x(x-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} + \frac{E_y(y+\frac{\Delta y}{2}) - E_y(y-\frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} + \frac{E_z(z+\frac{\Delta z}{2}) - E_z(z-\frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} \right] \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

Por outro lado, como o volume é elementar, podemos também aproximar a expressão para a carga total dentro do volume

$$q = \iint \rho\, dx\, dy\, dz \approx \rho(x,y,z)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

Substituindo estas duas expressões na Lei de Gauss, vemos que o volume elementar $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ se cancela dos dois lados da equação,

$$\frac{E_x(x+\frac{\Delta x}{2}) - E_x(x-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} + \frac{E_y(y+\frac{\Delta y}{2}) - E_y(y-\frac{\Delta y}{2})}{\Delta y} + \frac{E_z(z+\frac{\Delta z}{2}) - E_z(z-\frac{\Delta z}{2})}{\Delta z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Finalmente, se tomarmos o limite $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ e $\Delta z \to 0$, obtemos

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esta equação pode ser escrita numa forma compacta utilizando o operador

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

ou seja,

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \qquad (8)$$

A equação (8) é a Lei de Gauss na forma diferencial. Lembramos, do Curso de Cálculo, que $\nabla . \vec{E}$ é denominado a <u>divergência do vetor $\vec{E}$</u>. Como a Lei de Gauss, na forma integral é

$$\oint_S \vec{E} . d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV ,$$

utilizando a equação (8) podemos escrever

$$\oint_S \vec{E} . d\vec{A} = \int_V (\nabla . \vec{E}) dV \qquad (9)$$

Este é o <u>Teorema de Gauss</u> que vale para qualquer campo vetorial com derivadas contínuas dentro do volume V. Neste teorema, S é a superfície fechada que encerra o volume V e o sentido de $d\vec{A}$ é sempre apontando para fora do volume. Como exemplo direto do Teorema de Gauss, podemos escrever uma equação que o campo magnético deve satisfazer; como

$$\oint_S \vec{B} . d\vec{A} = 0 ,$$

temos, pelo Teorema de Gauss,

$$\int_V (\nabla . \vec{B}) dV = 0 .$$

Como esta relação tem que ser satisfeita para qualquer volume arbitrário V, resulta que

$$\nabla . \vec{B} = 0 , \qquad (10).$$

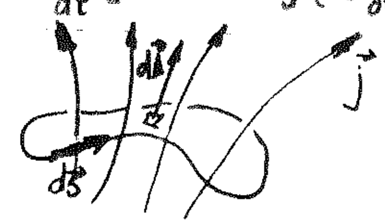
que reflete a não existência de uma 'densidade de monopolos magnéticos',

Lei de Ampère na forma diferencial

Para a Lei de Ampère não podemos empregar o mesmo procedimento porque ela envolve uma integral de linha num percurso fechado e não uma integral de fluxo sobre uma superfície fechada. Vamos englobar a corrente de condução e a corrente de deslocamento numa única corrente I e escrever $I = \int \vec{j}\cdot d\vec{A}$. Portanto esta densidade de corrente é dada por $\vec{j} = \vec{j}_c + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, onde $\vec{j}_c$ é a densidade de corrente de condução e o termo $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ vem de $I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int\left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{A}$.

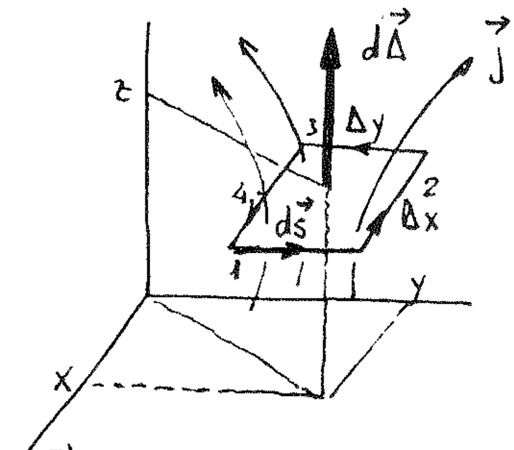
Assim a Lei de Ampère fica

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j}\cdot d\vec{A}$$



É importante realçar que nesta relação a integral da densidade de corrente é sobre uma superfície aberta S delimitada pelo contorno $\mathcal{C}$ e que as direções de $d\vec{s}$ e $d\vec{A}$ estão definidas de acôrdo com a regra da mão direita (veja figura). Para tomar o limite em que esta área se anula, é necessário escolher primeiro a sua orientação.

Vamos inicialmente considerar um contorno retangular elementar, de dimensões Δx e Δy, paralelo ao plano xy e centrado no ponto x, y, z. Então a área compreendida pelo contorno se estende de $\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)$ a $\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ e de $\left(y - \frac{\Delta y}{2}\right)$ a $\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)$, como mostrado na figura.



A integral de linha do campo $\vec{B}$ no percurso é então

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_1 \vec{B}\cdot\hat{e}_y\, dy + \int_2 \vec{B}\cdot(-\hat{e}_x)\, dx + \int_3 \vec{B}\cdot(-\hat{e}_y)\, dy + \int_4 \vec{B}\cdot\hat{e}_x\, dx$$

Como o percurso é elementar, e vamos tomar os limites $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$, podemos aproximar cada integral pelo produto da componente do campo paralela a cada lado, calculada na sua posição, pelo comprimento. Assim

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} \approx B_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y - B_x\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x - B_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y + B_x\left(y-\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x$$

ou

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} \approx \left[\frac{B_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - B_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} - \frac{B_x\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right) - B_x\left(y-\frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y}\right]\Delta x \Delta y$$

Por outro lado, como o elemento de área perpendicular ao plano do contorno é dado por $d\vec{A} = dx\, dy\, \hat{e}_z$, temos

$$\int \vec{j}\cdot d\vec{A} = \int j_z\, dx\, dy \approx j_z\, \Delta x \Delta y.$$

Substituindo estes dois resultados na Lei de Ampère, a área elementar $\Delta x \Delta y$ se cancela de ambos da equação e obtemos

$$\frac{B_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - B_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} - \frac{B_x\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right) - B_x\left(y-\frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y} = \mu_0 j_z$$

Finalmente, tomando os limites $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$, temos

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z$$

Para obter relações com as componentes j_x e j_y da densidade de corrente, temos que escolher contornos elementares de forma que os correspondentes elementos de área sejam paralelos aos eixos x e y, respectivamente. Fazendo isto, obtemos da mesma forma

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x$$

e

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y$$

Estes resultados podem ser agrupados, utilizando novamente o operador ∇, escrevendo

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (11)$$

onde

$$\nabla \times \vec{B} = \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y + B_z \hat{e}_z \right)$$

$$= \frac{\partial B_y}{\partial x} (\hat{e}_x \times \hat{e}_y) + \frac{\partial B_z}{\partial x} (\hat{e}_x \times \hat{e}_z) + \frac{\partial B_x}{\partial y} (\hat{e}_y \times \hat{e}_x) + \frac{\partial B_z}{\partial y} (\hat{e}_y \times \hat{e}_z)$$

$$+ \frac{\partial B_x}{\partial z} (\hat{e}_z \times \hat{e}_x) + \frac{\partial B_y}{\partial z} (\hat{e}_z \times \hat{e}_y)$$

$$= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z$$

A equação (11) representa a lei de Ampère na forma diferencial; lembrando que $\vec{j} = \vec{j}_c + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, esta lei fica expressa explicitamente como

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (12)$$

A equação (11) também nos permite escrever o outro teorema básico de Cálculo Vetorial. Substituindo na lei de Ampère

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \vec{J}$$

a expressão para $\vec{j}$ dado pela equação (11), obtemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} \qquad (13)$$

Este é o <u>Teorema de Stokes</u> que vale para qualquer campo vetorial com derivadas contínuas. Neste teorema, S é qualquer superfície aberta cujo contorno seja $\mathcal{C}$ e os sentidos de $d\vec{s}$ e $d\vec{A}$ estão relacionados pela regra da mão direita.

<u>Lei de Faraday na forma diferencial</u>

O Teorema de Stokes permite escrever também a lei de Faraday na forma diferencial. Partindo da equação (4),

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \ ,$$

e utilizando o Teorema de Stokes, podemos escrever

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

ou

$$\int_S \left[\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{A} = 0 \ .$$

Como este resultado tem que ser válido para qualquer superfície arbitrária S, o integrando tem que ser nulo; assim

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ , \qquad (14)$$

que representa a Lei de Faraday na forma diferencial.

As Equações de Maxwell na Forma Diferencial

Resumindo os resultados obtidos, as leis básicas da eletricidade e magnetismo ficam, na forma diferencial

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \longrightarrow \text{Lei de Gauss}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \text{Inexistência de monopolo magnético}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \text{Lei de Faraday}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \longrightarrow \text{Lei de Ampère com corrente de deslocamento.}$$

Talvez, a esta altura, o aluno ainda se sinta desconfortável com a existência da corrente de deslocamento. Mas este termo fonte na lei de Ampère é essencial para a existência de ondas eletromagnéticas, como veremos a seguir. Por isso, no apêndice a estas notas, mostramos como a corrente de deslocamento pode ser obtida através do requisito que a densidade de carga ρ e a densidade de corrente satisfaçam a <u>equação da continuidade</u>. Esta forma de introduzir a corrente de deslocamento é muito mais conveniente do que a apresentada na seção 4 do livro texto.

Com a introdução da corrente de deslocamento, Maxwell conseguiu obter um resultado físico notável:

<u>O campo eletromagnético ($\vec{E}$ acoplado a $\vec{B}$) se propaga como uma onda no vácuo, com velocidade igual a velocidade da luz.</u>

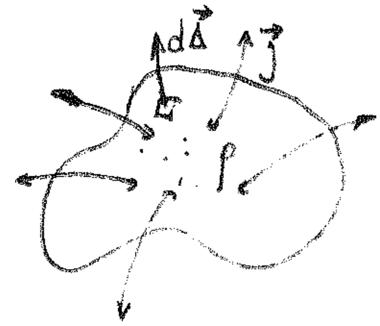
As ondas eletromagnéticas, previstas por Maxwell, não só permitiram uma interpretação clássica correta dos fenômenos ondulatórios da luz, como deram origem ao fabuloso desenvolvimento tecnológico em telecomunicações, ocorrido em nosso século.

As ondas eletromagnéticas são produzidas por cargas aceleradas. Neste curso, não vamos discutir a geração de ondas eletromagnéticas, que será vista em Física IV. Mas vamos mostrar como obter a <u>Equação de Onda</u> para o campo $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ e apresentar a solução desta equação num caso simples.

Apêndice

A Equação da Continuidade e a Corrente de Deslocamento

A equação da continuidade é simplesmente a expressão matemática da conservação de carga (ou de massa em Mecânica dos Fluídos). Suponhamos que a carga total dentro de um volume V, delimitado pela superfície S, esteja variando com o tempo. Como a carga total tem que ser conservada, se a carga total dentro de V estiver aumentando é porque tem que estar fluindo uma corrente resultante para dentro do volume, através da superfície S. Se a carga total estiver diminuindo, tem que estar fluindo uma corrente resultante para fora do volume. Desta forma, podemos escrever



$$I = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{A} = -\frac{dq}{dt} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV,$$

onde o elemento de área $d\vec{A}$ é tomado apontando para fora do volume. Utilizando o Teorema de Gauss podemos escrever

$$\int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{J}_c)\, dV \, ;$$

portanto

$$\int_V \left[\nabla \cdot \vec{J}_c + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dV = 0 .$$

Como esta integral tem que ser nula para qualquer volume V arbitrário, temos que

$$\nabla \cdot \vec{j}_c + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Esta é a equação da continuidade, que tem que ser satisfeita sempre, mesmo quando a densidade de carga e de corrente variarem com o tempo. A Lei de Kirchoff para correntes é uma conseqüência da equação da continuidade.

Suponhamos agora que a densidade de corrente de deslocamento não tivesse sido incluída por Maxwell na Lei de Ampère. Então as equações básicas do eletromagnetismo (página 15) ficariam

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \; ; \; \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \; ; \; \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c$$

Se ρ e $\vec{j}_c$ variarem com o tempo, temos da primeira equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \; .$$

Mas, da última equação, obtemos

$$\nabla \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) \equiv 0 \; ,$$

porque a divergência do rotacional de qualquer campo vetorial é sempre nula. Portanto, sem a corrente de deslocamento, a equação da continuidade não é satisfeita! Fica como exercício para os alunos interessados mostrar que, com a inclusão da densidade de corrente de deslocamento, a equação da continuidade passa a ser satisfeita.

Ondas Eletromagnéticas Planas no Vácuo

Vamos agora estudar como o campo eletromagnético se propaga no espaço livre, ou seja, numa região onde não há cargas e correntes. Naturalmente, como mencionamos antes, as ondas eletromagnéticas são criadas por cargas aceleradas ou correntes não-estacionárias. Mas estas cargas e correntes em geral estão confinadas em regiões restritas e o campo eletromagnético se propaga para fora destas regiões. Por exemplo, numa transmissão de televisão, as correntes que criam o campo eletromagnético estão localizadas na antena transmissora. Entre ela e as antenas receptoras, o campo eletromagnético se propaga no espaço livre.

Fazendo $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$, as equações de Maxwell ficam

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0\ ;\ \nabla\cdot\vec{B} = 0\ ;\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ;\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Portanto existem oito equações $(1+1+3+3)$ para seis incógnitas: as três componentes de $\vec{E}$ e as três componentes de $\vec{B}$, ou seja, duas equações parecem estar sobrando. O problema é solucionado facilmente ao nos darmos conta que as equações para a divergência de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estão contidas nas outras duas, como condições iniciais. Por exemplo, lembrando que para qualquer campo vetorial $\vec{A}$, temos que $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$; tomando o divergência da última equação obtemos

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) \equiv 0 = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{E} \therefore \quad \nabla\cdot\vec{E} = \text{const.}$$

Escolhendo esta constante nula obtemos a primeira equação. Da mesma forma, a equação $\nabla\cdot\vec{B}=0$ está contida como condição inicial na equação $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Portanto, para estudarmos as ondas eletromagnéticas no vácuo basta considerarmos as duas equações acopladas

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{B} &= \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

Ondas planas

Vamos resolver as equações de Maxwell para o campo eletromagnético no espaço livre na situação mais simples possível: os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ só variam numa direção espacial, que vamos tomar como a direção do eixo x, e com o tempo, isto é, $\vec{E}=\vec{E}(x,t)$; $\vec{B}=\vec{B}(x,t)$. Neste caso, as equações $\nabla\cdot\vec{E}=0$ e $\nabla\cdot\vec{B}=0$ impõem que

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0 \quad\Rightarrow\quad E_x \text{ uniforme (independente de } x)$$

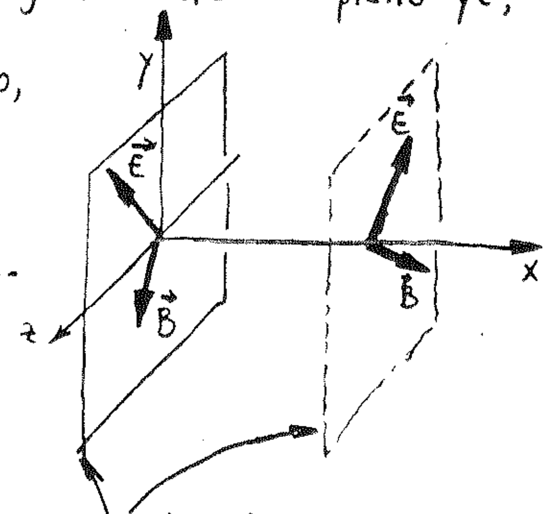
e

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}=0 \quad\Rightarrow\quad B_x \text{ uniforme (independente de } x).$$

Como estas componentes têm que ser uniformes, elas naturalmente não estão associadas a uma onda porque, como já sabemos do estudo de onda em Mecânica, as grandezas físicas numa onda devem oscilar tanto espacial como temporalmente. Assim, sem perda de generalidade, vamos tomar $E_x=0$ e $B_x=0$. Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ficam então

$$\vec{E} = E_y(x,t)\hat{e}_y + E_z(x,t)\hat{e}_z \quad\text{e}\quad \vec{B} = B_y(x,t)\hat{e}_y + B_z(x,t)\hat{e}_z$$

Isto significa que o campo eletromagnético está no plano yz, perpendicular à direção em que está variando, e portanto é uniforme neste plano. Por isso denominamos 'ondas planas' as ondas eletromagnéticas que vamos encontrar como solução das equações de Maxwell.



(campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ uniformes nestes planos)

Tomando as componentes y e z da equação $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, temos

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

e

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

Tomando as mesmas componentes da equação $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, temos

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

e

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Vemos portanto que as equações de Maxwell acoplam a componente E_z do campo elétrico com a componente B_y do campo magnético e a componente E_y do campo elétrico com a componente B_z do campo magnético. Por outro lado, as componentes do mesmo campo, E_y e E_z ou B_y e B_z, estão desacopladas entre sí. Podemos então prosseguir resolvendo as equações para um par de componentes acoplados, por exemplo E_y e B_z. Os resultados serão os mesmos para o outro par. Assim temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} \\ -\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0}$$

Esta é a equação de onda para o campo eletromagnético; é fácil de verificar que a componente B_z do campo satisfaz a mesma equação.

Velocidade de propagação

Antes de encontrar a solução da equação de onda, vamos verificar o significado do produto de constantes $\mu_0 \epsilon_0$ que aparece no segundo termo da equação. Lembrando que a unidade de campo elétrico é V/m, a dimensão do primeiro termo da equação é

$$\left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \right] = \frac{V}{m^3}$$

Naturalmente a dimensão do segundo termo tem que ser a mesma, ou seja,

$$\left[\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \right] = [\mu_0 \epsilon_0] \frac{V}{m s^2} = \frac{V}{m^3} \Rightarrow [\mu_0 \epsilon_0] = \left(\frac{m}{s} \right)^{-2}$$

Portanto, o produto $\mu_0 \epsilon_0$ tem dimensão de inverso de velocidade ao quadrado; assim definimos a constante

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8{,}8 \times 10^{-12}}} = 2{,}998 \times 10^8 \frac{m}{s}}$$

O valor numérico desta constante é igual ao da velocidade de propagação da luz no vácuo. Vamos ver logo a seguir que as soluções da equação de onda para o campo eletromagnético se propagam com esta velocidade. Usando a definição de c, a equação de onda fica

$$\boxed{\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial t^2} = 0}$$

Solução da equação de onda

A solução desta equação, que é uma equação de derivadas parciais de segunda ordem, pode ser obtida quase por inspeção. Notamos que a solução $\epsilon_y(x,t)$ deve ser tal que sua derivada segunda com relação a x sempre anula a derivada segunda com relação a t, multiplicada pela constante $1/c^2$. Isto sugere que $\epsilon_y(x,t)$ deve depender de x e t através de uma combinação apropriada destas variáveis. Vamos tentar inicialmente a combinação mais simples possível: uma relação linear entre x e t. Então tentamos uma solução da forma

$$\epsilon_y(x,t) = f(\xi) \; ; \; \xi = x + at \, ,$$

onde a é uma constante e f uma função arbitrária de ξ. Com esta escolha, temos

$$\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{d\epsilon_y}{d\xi} = \frac{df}{d\xi} \; ; \; \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} .$$

$$\frac{\partial \epsilon_y}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{d\epsilon_y}{d\xi} = a\frac{df}{d\xi} \; ; \; \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial t^2} = a^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

Substituindo estes resultados na equação de onda, obtemos

$$\frac{d^2f}{d\xi^2} - \frac{a^2}{c^2}\frac{d^2f}{d\xi^2} = 0 .$$

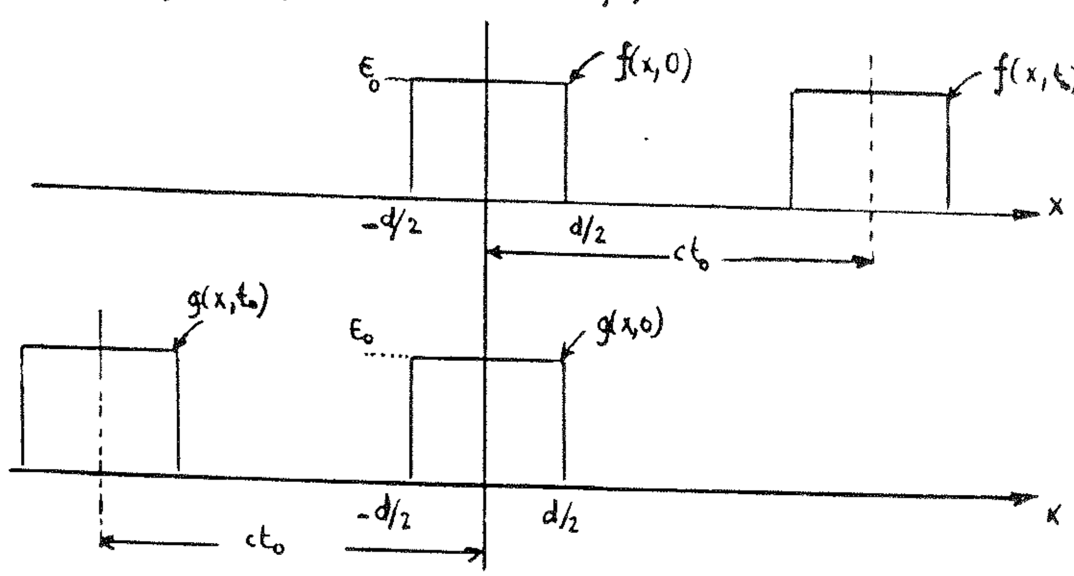
Portanto a equação é satisfeita, qualquer que seja a função $f(\xi)$, desde que $a = \pm c$. Existem então duas soluções possíveis para a equação de onda:

$$E_y(x,t) = f(x - ct)$$

ou

$$E_y(x,t) = g(x + ct)$$

onde f e g são funções arbitrárias. A primeira representa uma onda se propagando para a direita (onda caminhante progressiva) e a segunda uma onda se propagando para a esquerda (onda caminhante regressiva). Isto pode ser visto facilmente considerando uma forma qualquer para f ou g no instante $t=0$. Suponhamos, por exemplo, que no instante $t=0$ tanto f como g sejam dados por um pulso retangular de largura d, como indica a figura abaixo.



Como $f(\xi) = E_0$ para $-\frac{d}{2} < \xi < \frac{d}{2}$ ou $-\frac{d}{2} < x - ct < \frac{d}{2}$, temos que no instante $t=0$ o pulso estará centrado na origem enquanto que no instante

$t_0 > 0$ estará centrado no ponto $x = ct_0$. Por outro lado, como para a função g temos $\xi = x + ct$, o pulso correspondente se deslocará da origem para o ponto $x = -ct_0$, no mesmo intervalo de tempo. Para ambos, a velocidade de propagação é c.

Componente $B_z(x,t)$

Para encontrar a outra componente do campo eletromagnético, podemos utilizar qualquer das duas equações que usamos para derivar a equação de onda. Por exemplo

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

ou

$$\frac{dE_y}{d\xi} = -a\,\frac{dB_z}{d\xi}.$$

Portanto

$$B_z = \frac{-1}{a}E_y$$

Para a onda se propagando para a direita, $E_y(x,t) = f(x-ct)$, temos $a = -c$ e, portanto

$$B_z = \frac{1}{c}E_y \; ; \quad E_y = f(x-ct).$$

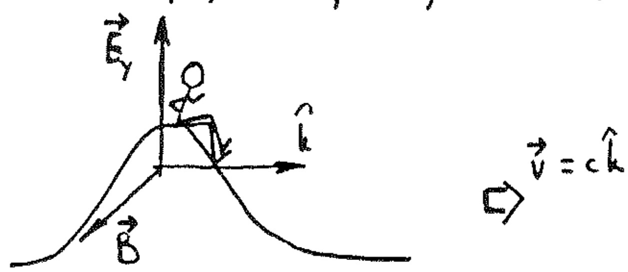
Por outro lado, para onda se propagando para a esquerda, $a = +c$, e

$$B_z = -\frac{1}{c}E_y \; ; \quad E_y = g(x+ct).$$

Estes resultados podem ser expressos de uma única forma notando que para ambos os casos a direção de propagação, a direção do campo elétrico $\vec{E}$ e a direção do campo magnético $\vec{B}$ formam um triedo ortogonal direto. Assim, se denotarmos por $\hat{k}$ o versor na direção de propagação da onda plana, temos

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{k}\times\vec{E}}$$

Para a onda caminhante progressiva, $\hat{k} = \hat{e}_x$ e $\vec{E} = E_y\hat{e}_y$, de forma que $\vec{B} = \frac{E_y}{c}\hat{e}_z$.
Para a onda caminhante regressiva, $\hat{k} = -\hat{e}_x$ e $\vec{E} = E_y\hat{e}_y$, de forma que $\vec{B} = -\frac{E_y}{c}\hat{e}_z$.
Este resultado é geral para ondas planas; para um observador viajando com a onda e olhando para a direção de propagação, se o campo elétrico estiver apontando na direção de sua cabeça, o campo magnético estará à sua direita.



Impedância intrínseca do vácuo

Em aplicações de engenharia é comum utilizar o campo $\vec{H}$, ao invés de $\vec{B}$, para representar o campo magnético de uma onda eletromagnética. Como $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, temos

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 c}\hat{k}\times\vec{E}.$$

Portanto

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \mu_0 c = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Lembrando que as unidades de $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são V/m e A/m, respectivamente, temos que a constante $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ tem unidade de Ohm. Esta constante é denominada impedância intrínseca ou impedância característica do vácuo e seu valor

$$\boxed{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,6\ \Omega}$$

Mais adiante vamos ver a relação entre esta grandeza e a intensidade (potência por unidade de área) das ondas eletromagnéticas. Por enquanto é interessante observar que quando uma onda eletromagnética incide numa antena receptora, nela são induzidas tensões e correntes. Haverá melhor transferência de energia quando houver '<u>casamento de impedâncias</u>', ou seja, quando a impedância da antena for próxima da impedância intrínseca do vácuo. Por isso as antenas comuns são ligadas ao receptor por um cabo bifilar (cabo paralelo) de '300 Ω'. Quando um cabo coaxial de 50 Ω (mais imune ao ruído) é utilizado, é necessário empregar um 'circuito acoplador de impedâncias' entre o cabo e a antena.

Ondas planas monocromáticas

Vimos que a solução da equação de onda pode ser qualquer função arbitrária da variável $\xi = x \pm ct$. Uma forma muito útil desta função, por razões que vamos ver mais adiante, é a forma senoidal

$$E_y(x,t) = E_0 \operatorname{sen}[k(x-ct)]$$

ou

$$E_y(x,t) = E_0 \cos[k(x-ct)]$$

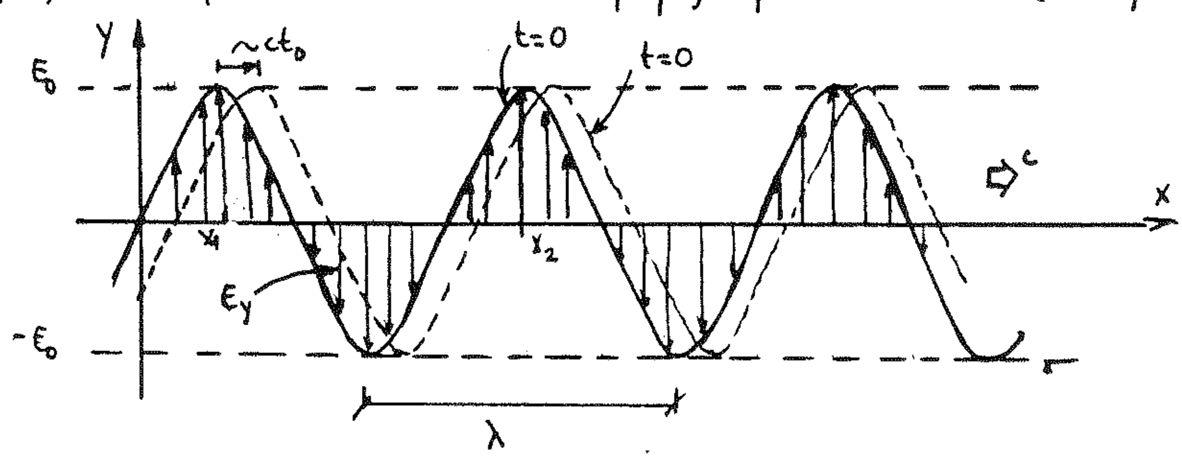
onde k é uma constante denominada <u>número de onda</u>. Esta constante tem que ser introdúvida porque naturalmente o argumento de uma função senoidal tem que ser um ângulo, ou seja, uma variável adimensional. Escrevendo

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \, \text{sen}[k(x-ct)] = \mathcal{E}_0 \, \text{sen}(kx - kct)$$

vemos que k tem dimensão de inverso de comprimento enquanto kc tem dimensão de inverso de tempo, já que tanto kx como kct têm que ser adimensionais. Definimos então a frequência angular

$$\boxed{\omega = kc}\ .$$

Se considerarmos esta forma do campo no instante $t=0$ e num outro instante $t_0 > 0$, vemos que toda a senóide se propaga para a direita. O campo



elétrico da onda varia entre os valores $-\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_y < \mathcal{E}_0$ tanto espacialmente como temporalmente. Isto significa que se o valor do campo fôr medido em função de x, <u>para um instante fixo</u>, por exemplo $t=0$, o valor de $\mathcal{E}_y$ vai variar senoidalmente com x, entre $-\mathcal{E}_0$ e $\mathcal{E}_0$. Da mesma forma, se um observador fixo numa posição qualquer, por exemplo $x=0$, medir o campo em função em função do tempo verá seu valor oscilar entre $-\mathcal{E}_0$ e $\mathcal{E}_0$, com freqüência angular ω. A distância entre dois máximos ou dois mínimos consecutivos da onda eletromagnética é denominado <u>comprimento de onda λ.</u>

Consideremos, por exemplo, a onda no instante $t=0$, como indicado na figura. O primeiro máximo da onda ocorre p ponto x_1 tal que $kx_1 = \frac{\pi}{2}$. O próximo máximo ocorre no ponto x_2 tal que $kx_2 = \frac{5\pi}{2}$. Portanto

$$\lambda = x_2 - x_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{k}$$

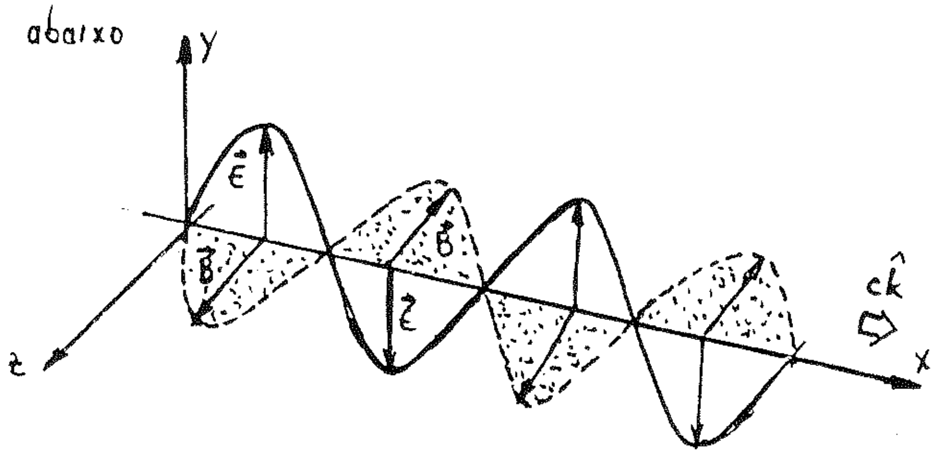
$$\therefore \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

Como $k = \frac{\omega}{c}$, temos $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\omega/2\pi} = cT$, onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ é o período de oscilação do valor do campo num ponto fixo. Assim, da relação

$$\boxed{\lambda = cT}$$

temos que o comprimento de onda é também a distância percorrida pela onda num período de oscilação do campo.

Como o campo magnético é simplesmente proporcional ao campo elétrico, $B_z = E_y/c$, as duas componentes do campo eletromagnético da onda oscilam em fase: toda vez que E_y muda de sinal B_z também muda, de forma que continua sempre à direita do campo elétrico com relação à direção de propagação, conforme indica a figura abaixo



No nosso estudo de ondas eletromagnéticas planas supusémos que os campos só variam com a coordenada x, que é a direção de propagação da onda. Como mencionamos antes, podemos generalizar este resultado representando a direção de propagação da onda pelo versor $\hat{k}$. Definimos então o <u>vetor número de onda</u> por $\vec{k}=k\hat{k}$, ou seja, um vetor cujo módulo é o número de onda e a direção a direção de propagação da onda. O produto kx no argumento da expressão para a onda plana monocromática é então substituído por $\vec{k}.\vec{r}$, onde $\vec{r}$ é o vetor posição com relação a uma origem qualquer. Finalmente em geral o valor do campo não precisa ser zero exatamente na origem e no instante $t=0$; isto vai depender da escolha que fazemos para as origens do tempo e do espaço. Assim podemos escrever a expressão de uma onda plana de uma forma geral como

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 \operatorname{sen}(\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\delta)\\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\hat{k}\times\vec{E} = \frac{1}{kc}\vec{k}\times\vec{E} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}\end{aligned}}$$

O argumento $\vec{k}.\vec{r}-\omega t+\delta$ é denominado <u>fase da onda</u> e a constante δ é denominada <u>fase inicial</u>. Como em ondas planas os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares à direção de propagação, temos também

$$\vec{k}.\vec{E}=0$$

$$\vec{k}.\vec{B}=0.$$