Observação sobre o núcleo de uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita

Denis de Assis Pinto Garcia

26 de dezembro de 2023

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, $T\colon V \to W$ uma transformação linear, $B \coloneqq (v_1, \dots, v_n)$ uma base ordenada de V e C uma base ordenada de W. Como, para cada $v \in V$,

$$\big[T(v)\big]_C = [T]_{B,C} \cdot [v]_B,$$

é fácil ver que

$$\begin{aligned}
\ker(T) &= \big\{v \in V : T(v) = 0_W\big\} \\
&= \left\{v \in V : \big[T(v)\big]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \left\{v \in V : [T]_{B,C} \cdot [v]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \left\{x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \text{ e } [T]_{B,C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, os elementos do núcleo de T são justamente os vetores em V cujas coordenadas em relação à base ordenada B sejam soluções do sistema linear

$$[T]_{B,C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1. Se $V \coloneqq P_1(\mathbb{R})$, se $B \coloneqq (1, t)$, e se $T \in L(V)$ é tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então, como, para cada $p(t) \coloneqq a_0 + a_1 t$ em V,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_0 + 2a_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\ker(T) &= \{a_0 + a_1 t : a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \text{ e } a_0 + 2a_1 = 0\} \\
&= \{a_0 + a_1 t : a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \text{ e } a_0 = -2a_1\} \\
&= \{-2a_1 + a_1 t : a_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \big\{a_1(t - 2) : a_1 \in \mathbb{R}\big\} \\
&= [t - 2].
\end{aligned}$$