PLANTÃO DE DÚVIDAS DO DIA 20 DE DEZEMBRO

LISTA 7

9)

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
$(x,y) \mapsto (2x, x-y)$

RESOLUÇÃO.

Como

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_T(t) &= (-1)^2 \det [T - tI_2] \\ &= \det \begin{bmatrix} 2-t & 0 \\ 1 & -1-t \end{bmatrix} \\ &= (2-t)(-1-t). \end{aligned}$$

Logo, como todas as raízes de $P_T(t)$ pertencem a $\mathbb{R}$, e $P_T(t)$ possui apenas raízes de multiplicidade 1, resulta do exercício 13 que T é diagonalizável.

10)

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

RESOLUÇÃO.

Como

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_T(t) = (-1)^2 \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^2 - 1 = t^2 - 2t + 1 - 1$$

$$= t^2 - 2t = t(t-2) = (t-0)(t-2),$$

e, portanto, os autovalores de T são 0 e 2.

• AUTOVETORES ASSOCIADOS AO 0.

Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x+y=0.$$

Logo,

$$V(0) = \ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$$
$$= \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,-1)],$$

e, por conseguinte, o conjunto dos autovetores de T associados ao autovalor 0 é $\{x(1,-1) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

• AUTOVETORES ASSOCIADOS AO 2.

Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -x+y=0.$$

Logo,

$$V(2) = \ker(T-2I) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x+y=0\}$$
$$= \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,1)],$$

e, portanto, o conjunto dos autovetores associados ao autovalor 2 é $\{(x,x) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.