Exercício 8 da sétima lista de Álgebra Linear I

Denis de Assis Pinto Garcia

24 de dezembro de 2023

Exercício 8.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, e sejam S e T em $L(V)$. Mostre que $T \circ S$ e $S \circ T$ possuem os mesmos autovalores.

Resolução.

Suponhamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ seja um autovalor de $S \circ T$, e que $v \in V \setminus \{0_V\}$ seja tal que $(S \circ T)(v) = \lambda v$. Nesse caso,

$$(T \circ S)\big(T(v)\big) = T\Big(S\big(T(v)\big)\Big) = T\big((S \circ T)(v)\big) = T(\lambda v) = \lambda T(v).$$

Além disso, como, por hipótese, $S\big(T(v)\big) = (S \circ T)(v) = \lambda v$, é claro que, se $\lambda \neq 0$, então $T(v) \neq 0_V$ (pois, se $T(v) = 0_V$, então $\lambda v = S\big(T(v)\big) = S(0_V) = 0_V$, e, como $v \neq 0_V$, disso resultaria que $\lambda = 0$). Sendo assim, podemos concluir que, se $\lambda \neq 0$, então λ é também um autovalor de $T \circ S$. Resta-nos, pois, analisar o caso em que $\lambda = 0$ — isto é, o caso em que $S \circ T$ não é injetora. Suponhamos, portanto, que $S \circ T$ não seja injetora e vamos mostrar que, nesse caso, $T \circ S$ também não o é. Para isso, notemos, inicialmente, que S pode ser ou não injetora. Se S não é injetora, então, como $\ker(S) \subseteq \ker(T \circ S)$, $T \circ S$ também não o é. Suponhamos, agora, que S seja injetora. Nesse caso, S é também sobrejetora (pois, como V tem dimensão finita, um operador linear de V em V é injetor se, e somente se, é sobrejetor), e, além disso, T não é injetora (pois, se fosse, então, como S é injetora, $S \circ T$ também o seria). Como T não é injetora, $\ker(T) \neq \{0_V\}$. Por sua vez, como S é sobrejetora, dado $w \in \ker(T) \setminus \{0_V\}$, podemos fixar $u \in V$ de modo que $w = S(u)$. Feito isso, notemos que $u \neq 0_V$ (pois, se $u = 0_V$, então $w = S(u) = S(0_V) = 0_V$), e que

$$(T \circ S)(u) = T\big(S(u)\big) = T(w) = 0_V.$$

Logo, $u \in \ker(T \circ S) \setminus \{0_V\}$, e, portanto, $T \circ S$ não é injetora.

Como λ pode ser qualquer autovalor de $S \circ T$, resulta do que acabamos de mostrar que todo autovalor de $S \circ T$ é também um autovalor de $T \circ S$. Além disso, se repetirmos esssencialmente o mesmo argumento, só tendo o cuidado de inverter os papéis de S e de T, seremos levados a concluir que todo autovalor de $T \circ S$ é também um autovalor de $S \circ T$. Portanto, $S \circ T$ e $T \circ S$ possuem os mesmos autovalores.