Pesquisa Operacional I
EPR0300

As Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Otimização Não-Linear

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & f(x) & & \\
\text{s.a:} & g_1(x) & \leq & 0 \\
 & g_2(x) & \leq & 0 \\
 & & \vdots & \\
 & g_q(x) & \leq & 0 \\
 & h_1(x) & = & 0 \\
 & h_2(x) & = & 0 \\
 & & \vdots & \\
 & h_r(x) & = & 0
\end{array}
$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Condições de Otimalidade

- No caso irrestrito, temos uma condição necessária para um ponto ser minimizador local:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

- Ou seja, o minimizador precisa ser um ponto estacionário

Função Lagrangiana

- No caso com restrições, um otimizador pode não ser estacionário para a função objetivo
- Por isso, introduzimos a função lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{q} \mu_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j h_j(x)$$

- Sob certas condições, um ponto ótimo do problema com restrições precisa ser um ponto estacionário da função lagrangiana

Função Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,\mu,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{q} \mu_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j h_j(x)$$

Note que se *x* é viável e a condição de complementaridade abaixo vale

$$\mu_i g_i(x) = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, q\}$$

então

$$\mathcal{L}(x,\mu,\lambda) = f(x)$$

Complementaridade

A complementaridade

$$\mu_i g_i(x) = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, q\}$$

É importante pois ela nos diz para ignorar restrições que não são ativas em um ponto ao analisarmos a otimalidade

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Condições necessárias para x^* ser otimizador

$$\begin{aligned}
\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{q} \mu_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \\
g_i(x^*) \leq 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, q\} \\
h_i(x^*) = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, r\} \\
\mu_i^* g_i(x^*) = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, q\} \\
\mu_i^* \geq 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, q\}
\end{aligned}$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Estacionariedade lagrangiana

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{q} \mu_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

O gradiente em um otimizador tem que ser uma combinação linear dos gradientes das restrições ativas

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Estacionariedade lagrangiana

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{q} \mu_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

$$\mu_i^* g_i(x^*) = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, q\}$$

$$\mu_i^* \geq 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, q\}$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Complementaridade e viabilidade dual

$$\mu_i^* g_i(x^*) = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, q\}$$
$$\mu_i^* \geq 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, q\}$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Viabilidade primal

$$g_i(x^*) \leq 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, q\}$$
$$h_i(x^*) = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

- Nem sempre são necessárias
- Será necessária se condições de qualificações das restrições forem válidas no minimizador
- Por exemplo, se os gradientes das restrições ativas forem LI (LICQ)

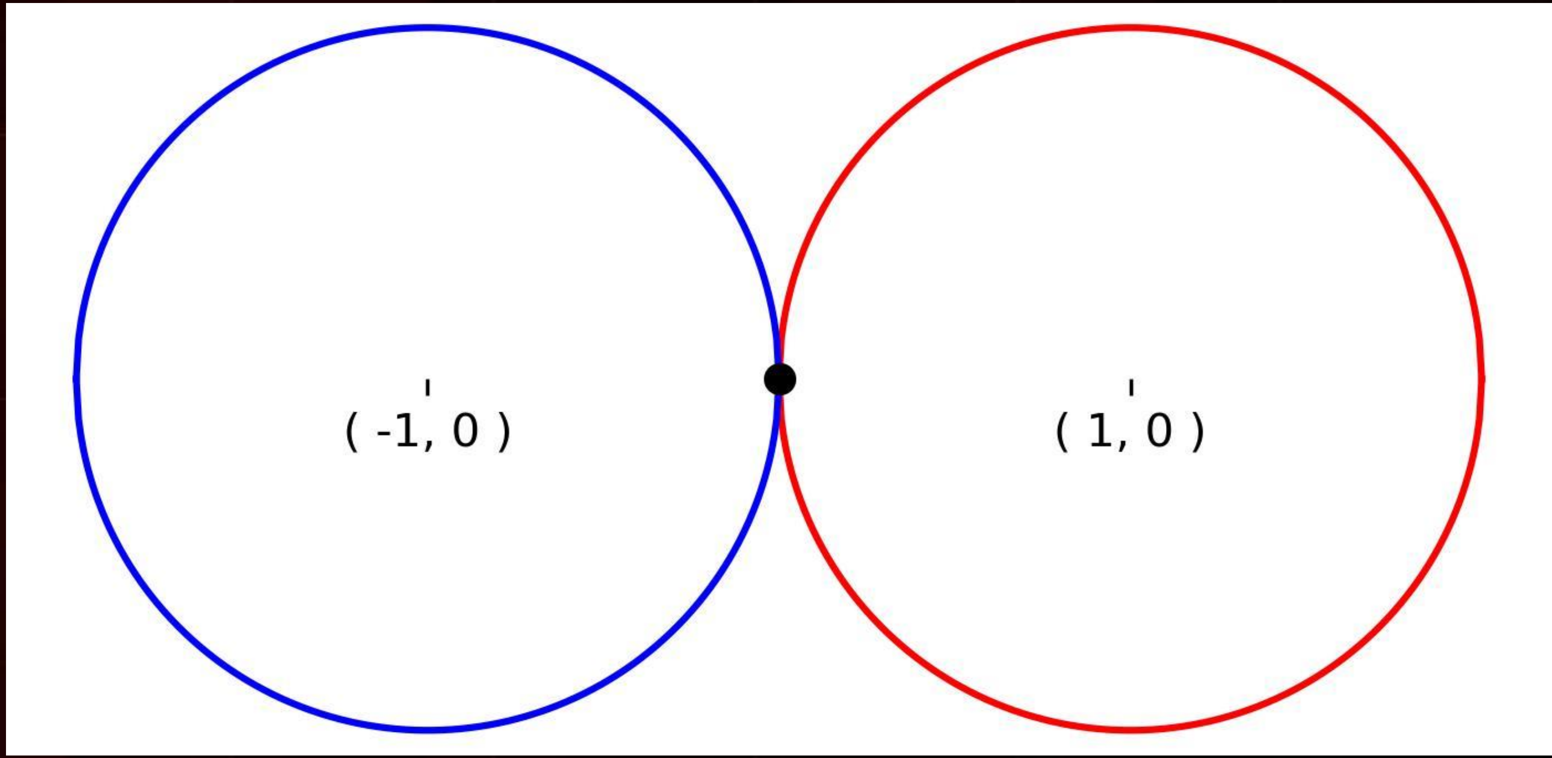
Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Exemplo

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = x_2 \\ \text{s.a:} \quad & g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ & g_2(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Exemplo



Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Exemplo

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + 1) \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

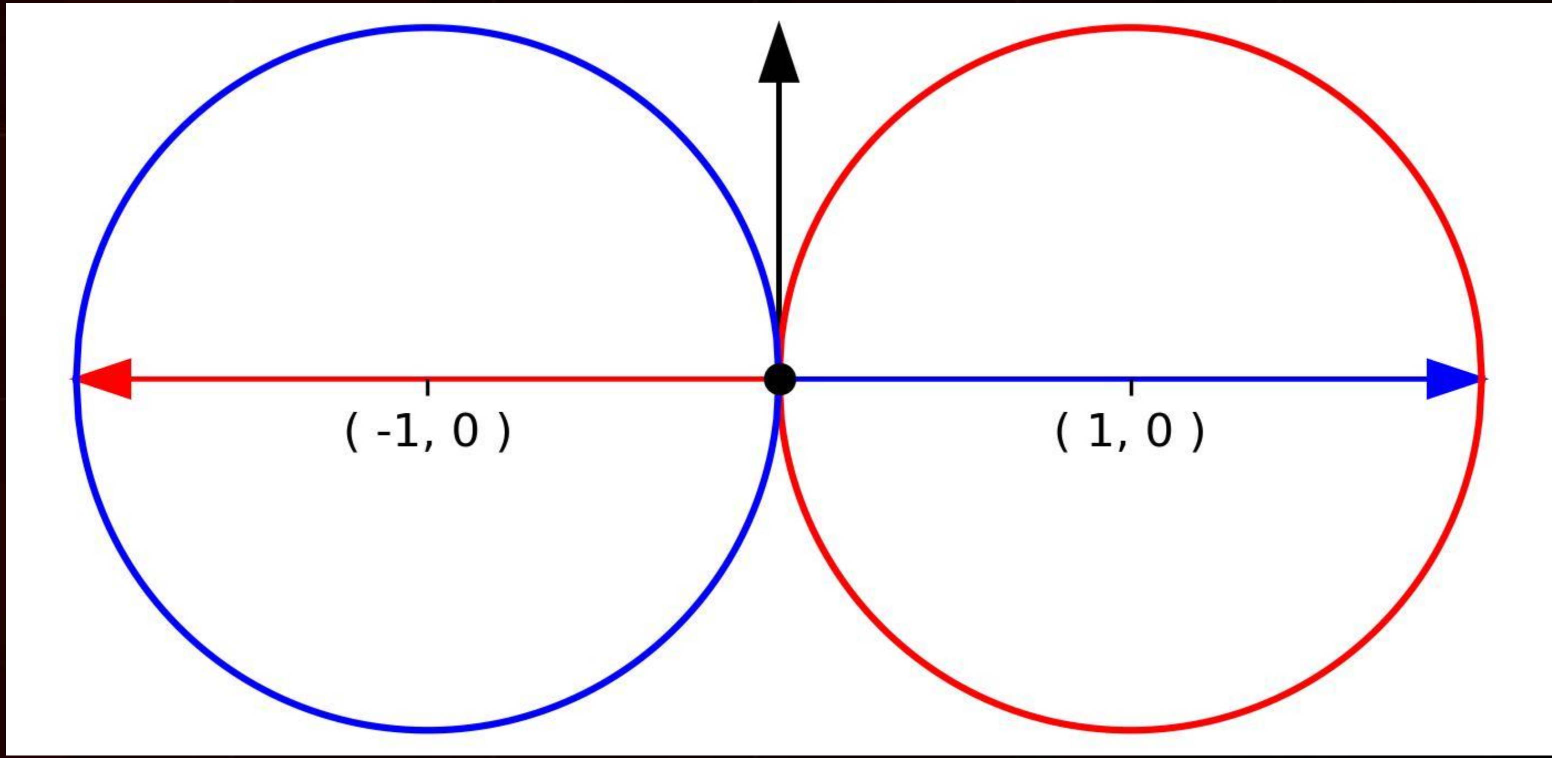
Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Exemplo

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; {\color{red}\nabla g_1(0,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \; {\color{blue}\nabla g_2(0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Exemplo



Condições de Karush-Kuhn-Tucker

- Quase sempre são difíceis de resolver
- Muito úteis do ponto de vista teórico
- Auxiliam no desenvolvimento de métodos para a solução
- São chamadas carinhosamente de KKT