Terceira Prova escrita de MAP 2320
BMA - BMAC 2° Semestre de 2023, aos 21 de dezembro de 2023
PARTE “TEÓRICA

Instruções

1. Esta prova deve ser resolvida até 1:00 de 23.12.2023.

2. A solução desta parte deve ser entregue em um único arquivo no formato “pdf”, depositado no local destinado a isso, na página desta disciplina no e-disciplinas.

3. O arquivo mencionado no item anterior deve ser um arquivo texto, não compactado, nem protegido por senha, que deve ser aberto por programas padrão de leitura de arquivos “pdf”(por exemplo: Adobe Acrobat Reader).

4. Esta parte da prova vale até 6,0 (seis) pontos no total da prova.

5. A parte “numérica”da prova valerá também até seis pontos no total da prova, a nota da prova será o mínimo entre 10,0 e a soma das notas obtidas nas partes teórica e numérica.

6. Você pode usar qualquer resultado enunciado em sala de aula, ou nas atividades extra de sábado, mesmo que o mesmo não tenha sido demonstrado durante a disciplina (por exemplo, a forma forte do princípio do máximo para equações parabólicas, resultados sobre convergência de séries de Fourier e fórmula integral de Poisson no plano).

7. Justifique suas afirmações e conclusões de forma precisa e clara, verifique as hipóteses dos teoremas que usar para essas justificativas, mas sem neuras (por exemplo, não é preciso provar que polinômios são funções contínuas).

8. A prova é do tipo *com consulta* e, durante a sua resolução, você pode conversar com colegas sobre as questões, não é exigido nenhum *voto de clausura* no período, mas a redação das soluções das questões deve ser uma atividade individual, não deve haver comunicação entre vocês para essa atividade. A quebra desta norma de conduta pode ter consequências nefastas...

9. Se você tiver dúvidas sobre enunciados das questões e/ou detalhes de sua resolução, envie um e-mail para garc341@gmail.com som o assunto (ou “subject”) P3 - MAP2320 Dúvida.

QUESTÕES

Questão 1 (1,5 pontos)

(a) Mostre que se $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ são funções pares então a função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$ tal que $u_{tt} = k^2 u_{xx}$ (com $k > 0$), $u(x,0) = \phi(x)$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ satisfaz

(i) $u(x,t) = u(-x,t), \ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(ii) $u_x(0,t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$

(b) Considere $\phi \in \mathcal{C}^2([0,+\infty[)$, com $\phi'(0+) = 0$ e $\psi \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[)$, com $\psi'(0+) = 0$ e determine a solução de

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^2([0,+\infty[\times\mathbb{R}) \\ u_{tt} = u_{xx}, \text{ em } (0,+\infty) \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = \phi(x), \ \forall x \geq 0, \ u_t(x,0) = \psi(x), \ \forall x \geq 0 \\ u_x(0,t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sugestão: Considere as extensões pares, $\widehat{\phi}$ e $\widehat{\psi}$, de ϕ e ψ a $\mathbb{R}$, depois...

Questão 2 (1,5 pontos) Use o método de separação de variáveis e resolva o problema

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,\pi] \times [0,+\infty), \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2((0,\pi) \times (0,+\infty), \mathbb{R}) \\ u_t = u_{xx}, \text{ em } (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = \cos x \sin x, \ \forall x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \ \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Questão 3 (2,0 pontos) Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Decidir se as afirmações abaixo são falsas (nesse caso apresente um contra exemplo) ou verdadeiras (nesse caso faça uma demonstração):

(a) Se $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função harmônica e limitada em A, então u tem máximo e tem mínimo em A.

(b) Se $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é harmônica e S^1 e S^2 são duas circunferências concêntricas contidas em A então $\int\limits_{z \in S^1} u(z) dS(z) = \int\limits_{z \in S^2} u(z) dS(z)$.

Questão 4 (1,0 ponto) Considere $h \in \mathcal{C}([0, \frac{\pi}{2}])$, com $h(0) = h(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Encontre a solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace em $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ com condição de fronteira $u(x, 0) = u(0, y) = 0$ e $u(\cos\theta, \sin\theta) = h(\theta),\ \forall\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Sugestão: Não use o método de separação de variáveis.