EXERCÍCIOS DA LISTA 7

(1) $T \in L(V)$, $\dim V < \infty$ $T \neq 0$

Hipótese: Para todo $v \in V$, existe $\alpha_v \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \alpha_v v$. (Todo vetor $v \in V$ é um autovetor)

Tese: Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $T = \alpha I$, isto é, $T(v) = \alpha v \ \forall \ v \in V$.

Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V.

Por hipótese, para cada v_i, existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que $T(v_i) = \alpha_i v_i$

Seja $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$. Pela hipótese, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $T(v) = \alpha v$.

Temos então

$$\alpha v = T(v) = T(v_1 + \dots + v_n) = T(v_1) + \dots + T(v_n)$$
$$\| \qquad\qquad = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$
$$\alpha(v_1 + \dots + v_n)$$

Logo: $\alpha v_1 + \dots + \alpha v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$\Rightarrow (\alpha - \alpha_1)v_1 + (\alpha - \alpha_2)v_2 + \dots + (\alpha - \alpha_n)v_n = 0.$$

Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI, temos que

$$\alpha = \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Assim, se $v \in V$, $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, pois B é base. Então

$$T(v) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = \alpha(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$$
$$= \alpha v. \qquad \text{Portanto, } T = \alpha I. \ \blacksquare$$

2. $V = C(\mathbb{R})$

$T \in L(V)$. definido por

$$T(f) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Mostrar que T não tem autovetores.

Suponha que exista $f \in C(\mathbb{R})$, $f \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ com $T(f) = \lambda f$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pelo fato de f ser contínua, existe $F \in C(\mathbb{R})$ tal que F é primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Então: $T(f)(x) = F(x) - F(0) = \lambda f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{F(x)}_{\text{derivável}} - \underbrace{F(0)}_{\text{constante}} = \lambda f(x) \quad \Rightarrow f(x) \text{ derivável}$$

$$F'(x) = \lambda f'(x) \implies f(x) = \lambda f'(x) \ \forall x.$$

Como $f \neq 0$, temos que $\lambda \neq 0$.

$$\boxed{f(x) = \lambda f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}} \ (*)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) \quad \text{(EDO)}$$

Resolver: (truque)

$$\left(\frac{f(x)}{\underbrace{e^{1/\lambda x}}_{\neq 0}}\right)' = \frac{f'(x)e^{\frac{1}{\lambda}x} - f(x)e^{1/\lambda x}\cdot\frac{1}{\lambda}}{(e^{1/\lambda x})^2} \quad (**)$$

Substituindo em (**) $f(x)$ por (*) temos:

$$\left(\frac{f(x)}{e^{1/\lambda x}}\right)' = \frac{f'(x)e^{1/\lambda x} - \cancel{\lambda f'(x)} e^{1/\lambda x}\cdot\cancel{\frac{1}{\lambda}}}{(e^{1/\lambda x})^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo: $\dfrac{f(x)}{e^{1/\lambda x}} = k$ constante

$k \neq 0$ (Se $k=0 \Rightarrow f=0$)

Assim, o autovetor $f(x) = k e^{\frac{1}{\lambda}x}$.

Mas $T(f)(x) = F(x) - F(0)$

Primitiva de $f(x) \Rightarrow \lambda \int k e^{1/\lambda x} \frac{1}{\lambda} dx = k \lambda e^{1/\lambda x}$

$$T(f)(x) = \lambda k e^{1/\lambda x} - k\lambda = \lambda(k e^{1/\lambda x} - k)$$

$\neq \lambda f(x)$ já que $\lambda \neq 0$ e $k \neq 0$. ∎

(3) Mostrar que $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ não é diagonalizável se $b \neq 0$,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$P_A(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ 0 & a-t \end{bmatrix} = (t-a)^2.$$

Logo a é o único autovalor

$$V(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{matrix} ax+by = ax \\ ay = ay \end{matrix}\} \Rightarrow \overset{\neq 0}{b}y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$= \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \dim V(a) = 1.$$

Logo $m_a(a) \neq m_g(a)$. ∎

Outro modo de ver o exercício (3)

Se A fosse diagonalizável, existiria $P \in M_2(\mathbb{R})$ tq $P^{-1}AP = D$ ↳ diagonal. Como o único autovalor de A é a, teríamos que $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

Se $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow A = P\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}P^{-1}$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ o que é absurdo já que $b \neq 0$. ∎

4. $T \in L(\mathbb{R}^n)$ tal que $T^2 = T$. Mostrar que T é diagonalizável.

Usar o Exercício 8 da Lista 6.

$T^2 = T \Rightarrow \mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T$ (*)

Se B_K é uma base de $\operatorname{Ker} T$ e B_I é uma base da imagem de T, (*) $\Rightarrow B_K \cap B_I = \emptyset$ e $B = B_K \cup B_I$ é uma base de $\mathbb{R}^n$

$B = \{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\in \operatorname{Ker} T}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{\in \operatorname{Im} T}\}$

$T(v_i) = 0\,v_i = (0, 0, \dots, 0) \quad \forall\, i = 1, \dots, k$

Se $u \in \operatorname{Im} T$, $u = T(w)$, $w \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow T(u) = T(T(w)) \underset{\substack{\text{pela hipótese} \\ T^2 = T}}{=} T(w) = u.$

Assim $T(v_i) = v_i = 1 \cdot v_i \quad \forall\, i = k+1, \dots, n.$

Logo $[T]_B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ n-k \\ \\ \end{array}$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-k}$ ∎

(5) posto $T \overset{def}{=} \dim \operatorname{Im} T$

$\dim V = n \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = n-1$
posto $T = 1$

Seja $B = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ uma base de $\operatorname{Ker} T$

Complete B a uma base de V
$\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\} =$

É claro que $T(v_n) \neq 0$, pois se $T(v_n) = 0$, $v_n \in \operatorname{Ker} T$ e portanto seria combinação linear de $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ implicando que B não seria LI.

$T(v_n) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_n \end{bmatrix} \qquad T(T(v_n)) = a_n T(v_n)$$

$\neq 0$ pois $v_n \notin \operatorname{Ker} T$

Se $v \in V$, $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$
$T(T(v)) = T(x_n T(v_n)) = x_n a_n T(v_n)$.
$\forall v \in V$.

Se $a_n = 0$, então $T(T(v)) = 0 \ \forall v \in V$

Se $a_n \neq 0$, então $T(\underbrace{T(v_n)}_{v}) = a_n T(v_n)$

Ou seja, $v = T(v_n)$ é um autovetor, associado ao autovalor a_n.

$C = \{v_1, \dots, v_{n-1}, v\}$ é uma base de V. $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & 0 & a_n \end{bmatrix}$

6. Note que, se $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é tq

$$[T_A]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ então, posto $T_A = 1$,

e $\dim \operatorname{Ker} T_A = 2$.

Note também que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$B = \{(1,1,1), \underbrace{v_2, v_3}_{\text{LI e em } \operatorname{Ker} T_A}\}$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ são semelhantes

pois são matrizes da mesma transformação linear mas em bases distintas ∎

7. $\exists\, v \in V$, $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Então $T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v)$
$= \lambda^2 T(v)$.

A demonstração é feita por indução em n.

Se $n = 1$ $T^1(v) = \lambda v$. (Base da indução)

$\underbrace{\text{Suponha agora que } k \geq 1 \text{ e que } T^k(v) = \lambda^k v.}_{\text{Hipótese de Indução}}$

Mostrar que $T^{k+1}(v) = \lambda^{k+1} v$

$$T^{k+1}(v) = T^k(T(v)) = T^k(\lambda v)$$
$$= \lambda T^k(v) \underset{HI}{=} \lambda \lambda^k v = \lambda^{k+1} v$$

Assim, o fato de ser verdadeiro para k implica na validade para $k+1$. Pelo PIF (princípio de indução finita) o resultado vale para todo $n \geq 1$.

8. Sejam $S, T \in L(V)$. Mostrar que $S \circ T$ e $T \circ S$ têm os mesmos autovalores

caso 1, $\lambda \neq 0$ Seja $\lambda \neq 0$ um autovalor de $S \circ T$.
Então existe $v \neq 0$ tal que $S(T(v)) = \underbrace{\lambda v}_{\neq 0}$ $\neq v$ $\neq 0$
Então, $T(v) \neq 0$.
Logo $(T \circ S)(T(v)) = T(S(T(v)))$
$= T(\lambda v) = \lambda T(v)$.
Logo λ é autovalor de $T \circ S$, com autovetor $T(v)$.

caso 2, $\lambda = 0$ Se S e T não são injetoras, é claro que nem $S \circ T$, nem $T \circ S$ são injetoras. Logo 0 é autovalor de $S \circ T$ e de $T \circ S$.
Suponha agora que T é injetora e que $\ker T \circ S \neq 0$. $\exists v \neq 0$ tq $T(S(v)) = 0$
$\Rightarrow S(v) = 0$ pois T é injetora.

Mas T injetora $\Rightarrow T$ bijetora. Então existe $u \in V$ tq $v = T(u)$. Logo $S(T(u)) = S(v) = 0$
$\Rightarrow u \in \ker S \circ T$. ∎

⑨ (a) $[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 0 \\ 1 & -1-t \end{bmatrix} = \underbrace{(t-2)(t+1)}_{\text{duas raízes} \neq s}$$

é diag.

(b) $[T]_{can} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} -1-t & 2 \\ -7 & 8-t \end{bmatrix}$$

$$= -(1+t)(8-t)+14$$

$$= -8 + t - 8t + t^2 + 14$$

$$p_T(t) = t^2 - 7t + 6 = \underbrace{(t-1)(t-6)}_{\text{duas raízes} \neq s}$$

é diag.

(c) $[T]_{can} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} 5-t & -1 & 0 \\ 0 & -5-t & 9 \\ 5 & -1 & -t \end{bmatrix}$$

$$= (5-t)\left[t^2+5t+9\right] - 45$$

$$= \cancel{5t^2} + 25t + \cancel{45} - t^3 - \cancel{5t^2} - 9t - \cancel{45}$$

$$= -t^3 + 16t$$

$$= -t(t^2-16) = -t(t+4)(t-4)$$

3 raízes distintas, é diagonalizável

(d) $[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-t \end{bmatrix}$$

$$p_T(t) = (1-t)^2(2-t)(3-t)$$

raízes: $1, 2, 3$

$\dim V(2) = 1 = m_a(2)$

$\dim V(3) = 1 = m_a(3)$

Determinar $V(1) = \mathrm{Ker}(T - I)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = 0$
$z = 0$ $\quad t = 0$

$V(1) = \mathrm{Ker}(T-I) = [(0,1,0,0)]$ $\qquad \dim V(1) = 1$
$m_a(1) = 2$ Não é diagonalizável.

13 Se $T \in L(V)$ tem n autovalores distintos

$p_T(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$

$m_a(\lambda_i) = 1 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$

Mas $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$

Portanto $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) \; \forall\, i$ e

T é diagonalizável.

14 $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{can} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$p_T(t) = (t-a)(t-1)(t-2)$

Se $a \neq 1$ e $a \neq 2$ então $p_T(t)$ tem 3 autovalores distintos e é então diagonalizável.

CASO : $\boxed{a = 1}$

$\begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad p_T(t) = (t-1)^2(t-2)$

$V(1) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$by + cz = 0$
$dz = 0$
$z = 0$

Se $b \neq 0 \Rightarrow y = 0$

Logo $V(1) = \{(x,0,0)\} = [e_1]$ $\quad \dim V(1) < m_a V(1)$

Não é diag'

Se $b=0$

$V(1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\} = [e_1, e_2]$

$m_a(1) = m_g(1)$ — é diagonalizável

(Sempre vale que $m_a(2) = m_g(2) = 1$).

$\boxed{\text{CASO } a=2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & b & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$m_a(2) = 2$

$p_T(t) = (t-2)^2(t-1)$

$$V(2) = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$by + cz = 0$

$-y + dz = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & bd+c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema equivalente:

$-y + dz = 0$

$(bd+c)z = 0$

Se $bd+c \neq 0$

$\Rightarrow z = 0$

$\Rightarrow y = 0$

Logo

$V(2) = [e_1]$

$m_a(2) > m_g(2)$

não é diag.

Se $bd-c=0$, então

$-y + dz = 0 \Rightarrow y = dz$.

Nesse caso, $V(2) = \{(x, dz, z),\ y, z\in\mathbb{R}\}$

$= [(1,0,0), (0,d,1)]$

$\dim V(2) = 2 \Rightarrow m_a(2) = m_g(2)$

$= 2$.

(Nesse caso, sempre $\dim V(1) = 1 = m_a(1)$).

(15) $[T]_{can} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} \frac{3}{5}-t & 4/5 \\ 4/5 & -\frac{3}{5}-t \end{bmatrix}$$

$$t^2 - \frac{9}{5} - \frac{16}{5} = t^2 - 1.$$

Logo T tem 2 autovalores $+1$ e -1 e portanto é diagonalizável.

$$V(1) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$-\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = 0 \qquad -2x + 4y = 0$$
$$\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y = 0 \qquad 4x - 8y = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = 2y$$

$$\Rightarrow -x + 2y = 0$$

$$V(1) = [(2,1)]$$

$$V(-1) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 8/5 & 4/5 \\ 4/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

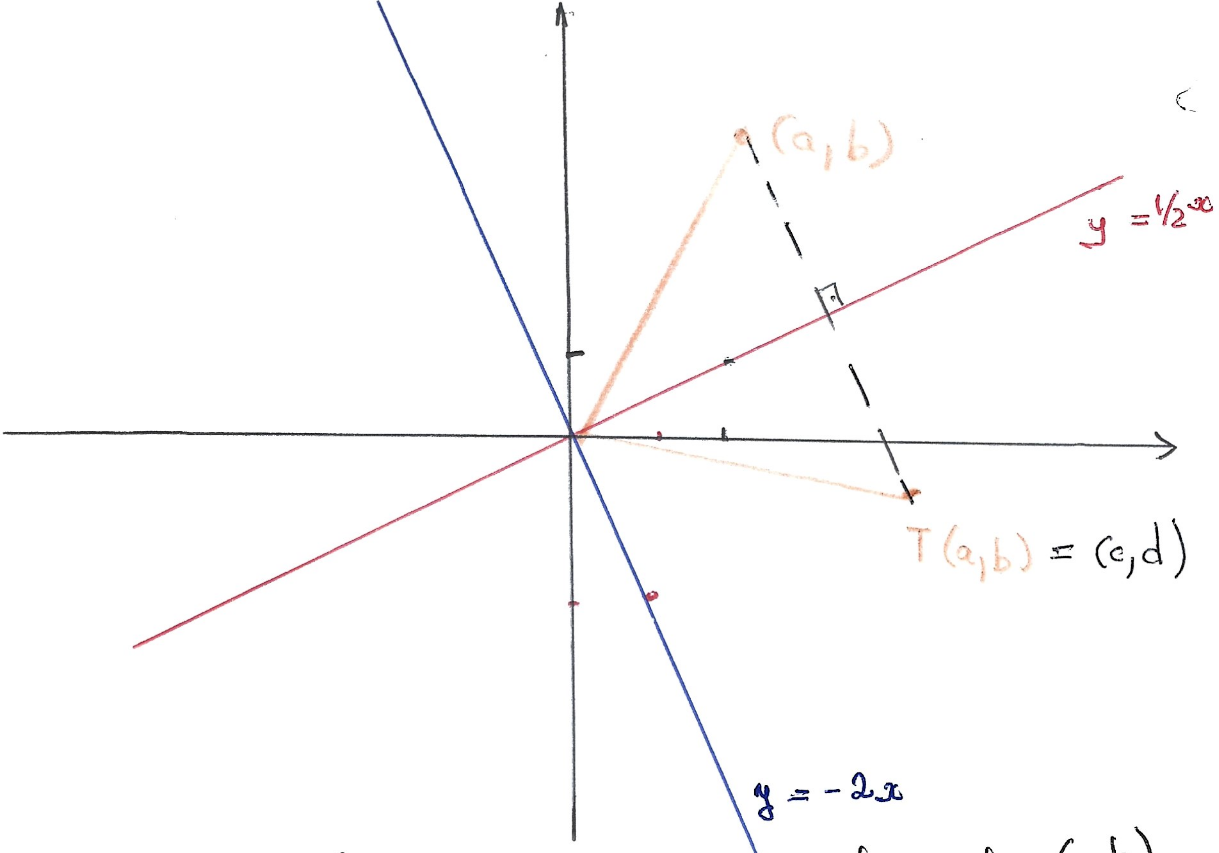
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$$

$$V(-1) = [(-2,1)]$$

Geometricamente

T é a reflexão em torno da reta

$$x - 2y = 0$$



Seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Determinar o simétrico de (a,b) em relação à reta $y = \frac{1}{2}x$.

Usar G.A. para determinar (c,d).

- (c,d) está na reta ortogonal a $y = \frac{1}{2}x$ e que passa por (a,b). Essa reta tem coeficiente angular igual a -2. Logo $d - b = -2(c - a)$.
- distância de (a,b) até a reta $y = \frac{1}{2}x$ = distância de (c,d) a essa ~~essa~~ reta.

Logo $\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}} = \frac{|c-2d|}{\sqrt{5}}$; $\Rightarrow |a-2b| = |c-2d|$

$\Rightarrow a - 2b = c - 2d$ ou $a - 2b = -c + 2d$

Se $a - 2b = c - 2d$ $\Rightarrow a - 2b = c - 2(b + 2a - 2c)$

$\Rightarrow a - \cancel{2b} = c - \cancel{2b} - 4a + 4c$

$\Rightarrow 5a = 5c \Rightarrow a = c$ e $b = d$

Se $a - 2b = 2d - c$, então

$a - 2b = 2(b + 2a - 2c) - c \Rightarrow 5c = 2b + 4a - a + 2b$

$c = \frac{4b}{5} + \frac{3}{5}a$

$$c = \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b$$

$$2d = c + a - 2b = \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b - 2b + a$$

$$= \frac{8}{5}a - \frac{6}{5}b \qquad \Rightarrow \underline{d} = \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b$$

$$T(a,b) = \left(\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b,\ \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b\right)$$

$$e\ [T]_{can} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 4/5 \\ \frac{4}{5} & -3/5 \end{bmatrix},$$