Física 4 IFUSP
2023

Prof. José Roberto B. Oliveira

Prova 2

1) Em um referencial inercial S uma partícula A sofre um decaimento radioativo emitindo um fóton no instante t_A, no ponto x_A do eixo dos x. No mesmo referencial, observa-se que a partícula B se desintegra no ponto x_B, também no eixo dos x, mas no instante t_B em que é atingida por um fóton.

a) *[0,5]* Dados $x_B=\frac{4}{3}ct_B>0, x_A=t_A=0$, qual é o tipo do intervalo espaço-temporal entre os eventos A e B?

Resp.: Como $(\Delta x)^2-c(\Delta t)^2=16/9-1>0$, o intervalo é do tipo "espaço".

b) *[1,0]* Poderia o decaimento de A ter alguma relação causal com a desintegração de B? Explique.
Resp.: Não porque um sinal entre A e B teria que viajar a velocidade maior que a da luz para tansmitir alguma informação entre os eventos A e B.

c) *[1,0]* Qual seria a velocidade mínima de um sistema S' com relação a S a partir da qual a desintegração de B ocorreria antes do decaimento de A em S', ou isso não seria possível?

Resp.: $\Delta t'<0$ se $\gamma\Delta t<\beta\gamma\frac{\Delta x}{c}, \Rightarrow \beta_{min}=\frac{c\,\Delta t}{\Delta x}=\frac{3}{4}$, $v_{min}=\frac{3}{4}c$

2) Uma partícula de massa m_0 e velocidade $v_0=\frac{4}{5}c$ colide com outra partícula, de massa $m_1=\frac{4}{9}m_0$ que viaja na mesma direção e sentido, mas com velocidade $v_1=\frac{3}{5}c$. Na colisão, as partículas se fundem, formando uma partícula composta.

a) *[1,0]* Qual é a velocidade V da partícula composta?

Resp.: Cons. do momento $\rightarrow$ $m_0\gamma_0 v_0+m_1\gamma_1 v_1=M\gamma V$

Cons. da energia $\rightarrow$ $m_0\gamma_0+m_1\gamma_1=M\gamma$

$\gamma_0=\frac{5}{3}, \gamma_1=\frac{5}{4}$ Cons. mom.: $m_0\frac{5}{3}c=M\gamma V$ Cons. En.: $m_0\frac{20}{9}=M\gamma$ Dividindo membro a membro: $V=\frac{3}{4}c$

b) *[1,0]* Qual é a massa da partícula composta M em termos de m_0 ?

Resp.: Usando $V=\frac{3}{4}c$, $\gamma=\frac{4}{\sqrt{7}}$. Substituindo na Cons. En.: $M=m_0\frac{5}{9}\sqrt{7}$.

c) *[0,5]* Poderia-se afirmar que parte da energia cinética do sistema inicial foi convertida em energia de repouso ou seria o contrário? Explique.

Resp.: Sim, porque $M=m_0\frac{5}{9}\sqrt{7}$ é maior do que $m_0(1+\frac{4}{9})=m_0\frac{13}{9}$ (pois $5^2*7=175>169=13^2$)
Além disso, no centro de massa da reação, toda a energia cinética é convertida em energia de repouso já que $K_{cm}=0$ após a colisão.

Apresente somente números inteiros, frações de números inteiros ou raízes quadradas de números inteiros nas respostas (por exemplo, $v=\frac{2}{3}\sqrt{5}c$). Favor simplificar as frações, quando possível. Não use decimais. Haverá um desconto na nota por decimal utilizado nas passagens ou nas respostas. O mesmo vale para a questão 3.

3) A velocidade de uma partícula de massa m_0 em um referencial inercial S é definida como sendo $\vec{u}=(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt})$.

a) *[1,0]* Qual é a definição de "velocidade própria" $\vec{\eta}$ e quais seriam as componentes do quadrivetor velocidade: $\eta^\mu=\begin{bmatrix}\eta^0\\ \eta^1\\ \eta^2\\ \eta^3\end{bmatrix}$ dessa partícula no referencial S?

Resp.: $\vec{\eta}=(\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau},\frac{dz}{d\tau})$. onde τ é o tempo próprio, e $d\tau=\frac{dt}{\gamma_u}$. Assim: $\eta^\mu=\frac{dx^\mu}{d\tau}=\begin{bmatrix}\gamma_u c\\ \gamma_u u_x\\ \gamma_u u_y\\ \gamma_u u_z\end{bmatrix}$

b) *[0,5]* Explique por que η^μ se comporta como um quadrivetor contravariante por transformações de Lorentz: $\bar{\eta}^\mu=\Lambda^\mu_\nu\eta^\nu$ para um referencial S' que se move com velocidade $\vec{v}$ constante com relação ao referencial S.

Resp.: Como dx^μ se comporta como o quadrivetor contravariante x^μ e $d\tau$ é um invariante relativístico (um escalar), η^μ é um produto de um escalar por um quadrivetor, sendo assim, é também um quadrivetor contravariante.

c) *[0,5]* Sendo $\Lambda^\mu_\nu=\begin{bmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ a matriz de transformação de Lorentz de S para S', qual seria o vetor velocidade relativa $\vec{v}$ correspondente (magnitude, direção e sentido) dessa transformação?

Resp.: $\vec{v}=\beta c\,\hat{x}$.

d) *[0,5]* Dados: $u_x = \frac{3}{5}c, u_y = u_z = 0$, e $v = \frac{4}{5}c$, qual seria o valor de da componente temporal da quadrivelocidade em cada um dos referenciais (S e S')?

Resp.: Em S, $\eta^0 = \gamma_u c = \frac{5}{4}c$, pois $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} = \frac{5}{4}$. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}$.

Em S', $\bar{\eta}^0 = \gamma(\eta^0 - \beta\eta^1) = \gamma(\gamma_u c - \beta\gamma_u u_x) = \frac{5}{3}\left(\frac{5}{4} - \frac{4}{5}\frac{5}{4}\frac{3}{5}\right)c = \frac{13}{12}c$.

e) *[0,5]* Nesse caso, qual seria o valor de $\bar{u}_x$ em S´?

Resp.: usando a transformação de velocidades $\bar{u}_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = -\frac{5}{13}c$.

Alternativamente, podemos obter a componente espacial x a partir da transformação $\bar{\eta}^1 = \gamma(\eta^1 - \beta\eta^0) = \gamma(\gamma_u u_x - \beta\gamma_u c) = -\frac{5}{12}c$. Dividindo pela componente temporal para cancelar o fator $\gamma_{\bar{u}}$: $\frac{\bar{\eta}^1}{\bar{\eta}_0} = -\frac{5}{13} = \frac{\bar{u}_x}{c}$, portanto $\bar{u}_x = -\frac{5}{13}c$.

4) *[2,0]* Utilizando o formalismo tensorial da Relatividade, a equação de continuidade (ou lei de conservação da carga elétrica) é expressa pela equação: $\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu J^\mu = 0$, ou seja, o divergente quadridimensional do tensor "densidade de carga e corrente elétrica" é nulo. Como vimos, isso pode ser demonstrado a partir das "equações de Maxwell": $\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \partial_\nu G^{\mu\nu} = 0$, expressas em termos dos tensores antissimétricos de segunda ordem do campo eletromagnético. Mostre que, na hipótese de existirem monopolos magnéticos, haveria uma lei análoga de "conservação da carga magnética". Assuma que o quadrivetor "densidade de carga e corrente magnética" é representado por M^μ. Explique em palavras cada manipulação algébrica feita nas passagens da demonstração.

Resp.: $\partial_\nu G^{\mu\nu} = M^\mu$ quadrivetor "densidade de carga e corrente magnética".

I) $\partial_\mu \partial_\nu G^{\mu\nu} = \partial_\mu M^\mu$ (divergente quadridimensional de M, a menos de constantes do sistema de unidades, assim como no caso de J).

mas: II) $\partial_\mu \partial_\nu G^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu G^{\mu\nu}$ (a ordem das derivações pode ser invertida)

e: III) $\partial_\nu \partial_\mu G^{\mu\nu} = -\partial_\nu \partial_\mu G^{\nu\mu}$ (o tensor dual G é antissimétrico)

como: IV) $-\partial_\nu \partial_\mu G^{\nu\mu} = -\partial_\nu M^\nu = -\partial_\mu M^\mu$ (a troca do símbolo do índice contraído não faz diferença)

Assim, como (I)=(II)=(III)=(IV): $\partial_\mu M^\mu = -\partial_\mu M^\mu$

Isto só é possível se $\partial_\mu M^\mu = 0$, e a "conservação da carga magnética" está demonstrada.