# 7600018 - Mecânica Clássica (2023)

## Trabalho - Oscilações Acopladas

Esta atividade é **facultativa** e corresponde ao tópico oscilações acopladas, ou **Modos Normais**, um conceito bastante importante em mecânica clássica, que vimos apenas brevemente durante a disciplina, na parte de movimento unidimensional. Mais especificamente, vimos o caso de três molas acopladas (dois corpos de massas $m_1$ e $m_2$ oscilando presos a duas molas cada), resolvendo para as equações de movimento e escolhendo novas variáveis, que "misturam" as coordenadas $x_1$ e $x_2$ relativas às duas massas, simplificando a descrição do movimento. No Capítulo 12 do Marion esse tema é aprofundado e generalizado, inicialmente tomando o caso das duas oscilações acopladas como exemplo e depois sistematizando o procedimento para uso em problemas mais gerais. Siga os passos do roteiro abaixo, preparando um arquivo para envio e avaliação.

# Roteiro

1. Considere três molas acopladas entre si e entre duas paredes, como na Fig. 12-1 do Marion, às quais estão ligados dois corpos, de coordenadas $x_1$ e $x_2$. Por simplicidade, tome as duas molas das extremidades com mesma constante elástica $\kappa$ e a do meio com $\kappa_{12}$, e também tome as massas dos corpos iguais, i.e. $m_1 = m_2 = M$. Encontre os "modos normais" do problema, ou seja, as coordenadas $\eta_1$ e $\eta_2$ formadas a partir de $x_1$ e $x_2$ que correspondam a movimentos oscilatórios *independentes*, com frequêncas angulares $\omega_1$ e $\omega_2$. Siga o desenvolvimento feito no livro, reproduzindo as passagens, ou demonstrando que as combinações encontradas correspondem de fato a oscilações desacopladas, nessas variáveis, chamadas de *coordenadas normais*.

2. Compare as frequências $\omega_1$ e $\omega_2$ relativas às coordenadas $\eta_{1,2}$ à frequência $\omega_0$ correspondente ao caso com apenas um dos corpos oscilando e o outro mantido fixo. O que seria o caso de acoplamento fraco? Como se simplifica o movimento nesse caso?

3. Escreva as energias cinética e potencial para o problema acima, em termos de $x_1$, $x_2$,

$\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Obtenha as Eqs. de Lagrange do problema, e suponha para $x_i$ uma solução na forma de soma (ou melhor, combinação linear, com coeficientes a serem determinados) de dois movimentos oscilatórios simples $\eta_j(t)$, $i = 1, 2$, de frequências $\omega_1$ e $\omega_2$. Encontre $\omega_1$ e $\omega_2$ diagonalizando o sistema que acopla as duas soluções, e verifique que os valores coincidem com o caso visto acima. Invertendo a relação entre $x_i$ e $\eta_j$, você obtém os modos normais acima?

4. Esse procedimento pode ser aplicado para número arbitrário $n$ de coordenadas acopladas $q_i$, desde que o "acoplamento" seja quadrático, como no caso acima. Isso se verifica para as chamadas *pequenas oscilações*, a partir da expansão de Taylor da energia potencial do sistema. Demonstre como isso pode ser aplicado à descrição de dois pêndulos acoplados, Exemplo 12.4 do Marion, encontrando os modos normais em termos dos ângulos $\theta_1$ e $\theta_2$ do problema.

5. Discuta, da mesma forma, a aplicação ao caso das vibrações na molécula de $CO_2$, Exemplo 12.5 do Marion.