Segunda Prova - CCM0213

PROF. MARCONE C. PEREIRA[1]
IME-USP

Todas as questões devem ser devidamente justificadas.

Nome: No. USP:

Questão 1 (1,6 pontos). Assinale **V** para verdadeiro e **F** para falso. Caso a afirmação seja verdadeira, justifique, caso seja falsa, dê um contra-exemplo.

( ) Toda transformação linear possui pelo menos um autovalor.
( ) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertível. Então, A é diagonalizável se e só se A^{-1} o é.
( ) Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ é limitado.
( ) Todo operador linear é diagonalizável.

Questão 2 (1,4 pontos). Encontre uma base para o núcleo e imagem de:

A. $D : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definido por $(Dp)(x) = p'(x)$.
B. $T : \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}^3$ dada por

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{C}$ é a base canônica de $\mathbb{C}^3$.

Questão 3 (1 ponto). Encontre uma matriz diagonal D e uma matriz ortogonal P tal que $A = PDP^t$ com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1]Boa prova!

Gabarito P2

Q1. (F) $T: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (-y, x)$

$\mathbb{R}^2$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ não possui autovalor

pois $\det\left([T-\lambda I]_{\varepsilon}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$

em $\mathbb{R}$. $\left(\varepsilon = \{(1,0),(0,1)\}\right)$

(V) Se $A = PDP^{-1}$ para D diagonal e P invertível

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1} = P D^{-1} P.$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} \text{ com } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Como A é invertível $\lambda_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$.

(V) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Defina a cobertura $\mathcal{C} = \{ B_\delta(x) : x \in A \}$ onde $\delta > 0$ e

$B_\delta(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n ; |x - y| < \delta \}$ (bola de raio $\delta > 0$ centrada em x).

Como A é compacto existe $x_i \in A$ $1 \leq i \leq m$ t.q.

$\mathcal{C} \supset \mathcal{C}' = \{ B_\delta(x_1), \dots, B_\delta(x_m) \}$ é cobertura finita de A.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_\delta(x_i) \subset B_{2m\delta}(x_1).$$

(F) $T(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0, y)$

não é diagonalizável. Apenas $\lambda = 0$ é autovalor e $\mathrm{Aut}(0) = [(1,0)]$.

Q2. a) $Nuc(D) = [\,p(x) = 1\,]$.

$Im(D) = P(\mathbb{R})$ pois para todo

$p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ existe

$q(x) = a_0 x + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ tal que

$Dp = q$.

b) $Nuc(T) = \{0\}$.

$Im(T) = \mathbb{C}^3$ pelo teorema do Núcleo e imagem.

$3 = \dim \mathbb{C}^3 = \dim Nuc(T) + \dim Im(T)$

$= 0 + \dim Im(T)$ $\therefore$ $Im(T) = \mathbb{C}^3$.

Q3.

$$\phi(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-9\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda-8\right) = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & & 0 \\ & 4 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Aut}(1) = [(0,0,1)]$$

$$\mathrm{Aut}(-2) = [(1,-1,0)] = [(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)]$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Aut}(4) = [(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)]$$