MAT-315 - Introdução à Análise (Real) - 2023

Prova Substitutiva

Tipo B1

Nome: ____ Turma: __________

Questão 1. Considere $A = \{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N}\}$. Determine o supremo e o ínfimo de A. Justifique formalmente usando a **definição** de supremo e de ínfimo.

Questão 2. Decida se as afirmações abaixo são falsas ou verdadeiras. Cada 2 respostas erradas anulam uma certa. Responda nesta folha

(F) Todo conjunto não vazio de números reais possui supremo

(V) Não existe uma bijeção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

(V) Se (a_n) é convergente e f é contínua, então $f(a_n)$ é convergente.

(F) Se $a_n \to 0$ e $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ ou $\frac{1}{a_n} \to -\infty$

(F) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente e $b_n \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

(V) Se para cada $x \in [a, b]$ existe algum $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > f(x)$ então f não é contínua em $[a, b]$.

(V) Se (a_n) possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$ então ou (a_n) converge para a ou é divergente.

(V) Existe uma bijeção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$.

Questão 3. (a) Enuncie precisamente a Propriedade Arquimediana dos números reais.

(b) Prove usando a definição que a sequência $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero. Destaque o momento em que se usa a Propriedade Arquimediana dos reais.

Questão 4. Decida se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ é convergente ou divergente.

Questão 5. Suponha que f seja uma função contínua em $\mathbb{R}$. Prove que se $f(a) > 0$ então existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in]a - r, a + r[$. *Esta é a versão para funções contínuas do Teorema da Conservação do Sinal, visto para sequências.*