Determinantes e

Polinômio Característico

$$p_T(t) \overset{def}{=} (-1)^n \det(A - tI_n) \,, \text{ onde}$$

$$A = [T]_B \,, \; B \text{ base qualquer de } V$$

$p_T(t)$ está bem definido, isto é, independe da base B escolhida para montar $[T]_B$.

$$\underset{C}{V} \xrightarrow{I} \underset{B}{V} \xrightarrow{T} \underset{B}{V} \xrightarrow{I} \underset{C}{V}$$

$$\underset{M}{[T]_C} = [I \circ T \circ I]_C = \underbrace{[I]_{B,C}}_{P^{-1}} \underbrace{[T]_B}_{A} \underbrace{[I]_{C,B}}_{P}$$

$$\det(M - tI_n) = \det(P^{-1} A P - tI_n)$$

$$= \det(P^{-1} A P - P^{-1} tI_n P)$$

$$= \det(P^{-1}(A - tI_n) P)$$

$$= \det P^{-1} \det(A - tI_n) \det P$$

$$= \det(A - tI_n).$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}-t \end{bmatrix}$$

No cálculo do determinante vai aparecer apenas 1 vez $(a_{11}-t)\cdots(a_{nn}-t)$ e a potência t^n só

(*)

aparece uma vez no desenvolvimento de (*).

Assim, o coeficiente de t^n no cálculo desse determinante é $(-1)^n$.

Assim $\boxed{p_T(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0}$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

$$A - tI_3 = \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 2 \\ 3 & 4-t & 1 \\ 2 & 5 & -t \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = (1-t)\left[(4-t)(-t) - 5\right] + 2\left(15 - 2(4-t)\right)$$

$$= (1-t)(t^2 - 4t - 5) + 2(7 + 2t)$$

$$= t^2 - \cancel{4t} - 5 - t^3 + 4t^2 + 5t + 14 + \cancel{4t}$$

$$= -t^3 + 5t^2 + 5t + 9$$

$$\boxed{p_T(t) = t^3 - 5t^2 - 5t - 9}$$

Voltando à PROPOSIÇÃO 1. (Em def de autovalor e autovetor.)

Note que $T - \lambda I$ não é inversível $\Leftrightarrow \det(T - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ é raiz do polinômio característico de T.

Os autovalores de T são as raízes de $p_T(t)$.

Seja $T \in L(V)$ e suponha que T é diagonalizável, isto é, que existe B base de V tal que $[T]_B = D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$T(v_i) = d_i v_i$

Logo, existe B base de V tq todo vetor v_i é autovetor de T.

Podemos selecionar, entre $d_1, \dots, d_n$, os números $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$

Reorganizando a base B, podemos escrever B ordenada como $(B_1, \dots, B_k)$ onde B_i = base de $V(\lambda_i)$.

Usando essa matriz $[T]_B$ temos que:

$$\left.\begin{aligned} & p_T(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_k)^{n_k}, \\ & \text{onde } n_i = \dim V(\lambda_i). \end{aligned}\right\} (*)$$

Se T é diagonalizável vale $(*)$.

Objetivo: Mostrar que $(*)$ é suficiente para T ser diagonalizável.

DEF: Seja $T \in L(V)$ e λ autovalor de T

MULTIPLICIDADE ALGÉBRICA DE λ

$m_a(\lambda)$ = multiplicidade de λ como raiz de $p_T(T)$.

MULTIPLICIDADE GEOMÉTRICA de λ

$m_g(\lambda) = \dim V(\lambda)$.

TEOREMA: $m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$

Dem: Seja λ um autovalor de T e seja $k = \dim V(\lambda)$.

Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de $V(\lambda)$.

Estenda $\{v_1, \dots, v_k\}$ a uma base de V

$B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

$$[T]_B = k\left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & a_{1\,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & a_{2\,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ & k & \lambda & a_{k\,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline & & & a_{k+1\,k+1} & \cdots & a_{k+1\,n} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] \Big\}\, n-k \qquad C = \begin{bmatrix} a_{k+1\,k+1} & \cdots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\phantom{a_{k+1}\cdots a_{nn}}}_{n-k}$$

$$[T]_B = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{matrix} & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$

$$\det(T - tI_n) = \underbrace{\det\begin{bmatrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{bmatrix}}_{(-1)^k(\lambda - t)^k} \det(C - tI_{n-k})$$

Logo λ aparece pelo menos como raiz de multiplicidade de k no polinômio característico de T.

Assim, $m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$ ∎

TEOREMA: Autovetores de T associados a autovalores distintos são L.I.

Dem: Suponha que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Mostrar que $\{v_1, v_2\}$ é L.I.

Suponha que $a v_1 + b v_2 = 0$.

$0 = a T(v_1) + b T(v_2)$

$\Rightarrow a \lambda_1 v_1 + b \lambda_2 v_2 = 0 \quad (*)$

$$a v_1 + b v_2 = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_1 a v_1 + \lambda_1 b v_2 = 0$$
$$- \left(a \lambda_1 v_1 + \lambda_2 b v_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} b \underbrace{v_2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow b = 0$$

Voltando a $a v_1 + b v_2 = 0$, temos que $a v_1 = 0 \Rightarrow a = 0$.

Assim, 2 autovetores associados a autovalores distintos são LI.

Mostrar que 3 autovetores associados a autovalores distintos são LI,

Suponha que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são dois a dois distintos e que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, 3$

Se $\underbrace{a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0}_{(*)}$, mostrar que $a = b = c = 0$.

$$0 = T(0) = a T(v_1) + b T(v_2) + c T(v_3)$$
$$0 = a \lambda_1 v_1 + b \lambda_2 v_2 + c \lambda_3 v_3 \quad (**)$$

Multiplique $(*)$ por λ_1

$$0 = a \lambda_1 v_1 + b \lambda_1 v_2 + c \lambda_1 v_3 \quad (***)$$

Fazendo $(***) - (**)$

$$b(\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + c(\lambda_1 - \lambda_3) v_3 = 0$$

Como já sabemos que 2 autovetores associados a autovalores distintos são LI, temos que

$$b(\lambda_1 - \lambda_2) = c(\lambda_1 - \lambda_3) = 0 \Rightarrow b = c = 0$$

E voltando em (*) temos que $av_1 = 0 \Rightarrow a = 0$.

Note que k autovetores associados a autovalores distintos serem LI, $\Rightarrow$ $k+1$ autovetores associados a autovalores distintos são LI. ∎

TEOREMÃO: Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. $T \in L(V)$ é diagonalizável $\Longleftrightarrow$ (1) $p_T(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_k)^{n_k}$

$n_1 + \cdots + n_k = n$

$\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$.

(2) $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ $\forall\, i = 1, \ldots, n$.

Dem: $(\Rightarrow)$ OK

$(\Leftarrow)$ Suponha que $B_i = \{v_1^i, \ldots, v_{j_i}^i\}$ é uma base de $V(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$

Vamos mostrar que

$(v_1^1, \ldots, v_{j_1}^1, v_1^2, \ldots, v_{j_2}^2, \ldots, v_1^k, \ldots, v^k)$ é

uma base de V.

Por (2) temos que $j_i = n_i$. Logo $j_1 + \cdots + j_k = n$

Basta então mostrarmos que esse conjunto é LI.

Se tomarmos uma CL

$$\underbrace{a_{11} v_1^1 + \cdots + a_{1n_1} v_{n_1}^1}_{v_1} + \cdots + \underbrace{a_{k1} v_1^k + \cdots + a_{kn_k} v_{n_k}^k}_{v_k} = 0$$

teremos uma soma $v_1 + \cdots + v_k = 0$

Como $v_1, \dots, v_k$ são autovetores associados a autovalores distintos, eles são L.I.

Logo $v_1 + \cdots + v_k = 0 \underset{i}{\Longrightarrow} v_i = 0 \ \forall i$

$v_i = a_{1i} v_1^i + \cdots + a_{in_k} v_{n_k}^i = 0$

e B_i é base, então os escalares tem que ser todos iguais a 0. ∎

Para ver se uma matriz (ou operador linear) é ou não diagonalizável:

(1) Ache $p_T(t)$ e determine suas raízes.

(2) Para cada raiz λ, determine $\dim V(\lambda)$.

Exemplo: $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$p_T(t) = (-1)^3 \det \begin{bmatrix} -t & 0 & 4 \\ 1 & -t & -8 \\ 0 & 1 & 5-t \end{bmatrix} = -t(t^2-5t+8)(-1)^3 + 4$$

$$= (-t^3+5t^2-8t+4)(-1)^3$$

$$p_T(t) = t^3 - 5t^2 + 8t - 4$$

$$p_T(t) = (t-2)^2(t-1)$$

$$[T-I] \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$y = -4z$

$x = 4z$

$(4z, -4z, z)$

$V(1) = [(4,-4,1)]$

$V(2)$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = -3z$$
$$x = 2y + 8z = -6z + 8z$$

Não é diagonalizável pois $m_g(2) < m_a(2)$.

Exemplo 2: $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_T(t) = -\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -1 \\ 2 & 3 & 1-t \end{bmatrix}$$

$$= -\Big[(4-t)\big[(5-t)(1-t)+3\big] - 3\big[2(1-t)+2\big] - 1\big[6-2(5-t)\big] \Big]$$

$$= -\Big[(4-t)\big[t^2-6t+9\big] - 3\big[4-t\big] - 1\big[-4+2t$$

$$= -\Big[(4-t)\big[t^2-6t+9-3\big] + 4-2t\Big]$$

$$= -\big(4t^2-24t+24-t^3+6t^2-6t+4-2t\big]$$

$$= -\left(-t^3+10t^2-32t+28\right)$$

$$= t^3-10t^2+32t-28$$

Exemplo 2:

$$T \in L(\mathbb{R}^3) \text{ tq } [T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_T(t) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 3 & -t & 1 \\ 6 & 2 & 1-t \end{bmatrix}$$

$$= (2-t)(t^2-t-2) - 1(3-3t-6)$$
$$+1(6+6t)$$
$$= (2-t)(t+1)(t-2) + 3(t+1) + 6(t+1)$$
$$= (t+1)(-t^2+4t-4+9)$$
$$= -(t+1)(t^2-4t-5) = -(t+1)^2(t-5)$$

autovalores: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 5$

$m_a(\lambda_1) = 2$ $\quad$ $m_a(\lambda_2) = 5$

$$V(\lambda_1) = Ker(T+I)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ker(T+I) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (T+I)(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

Resolver o sistema em que a matriz é

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Logo $z = -3x - y$

$$Ker(T+I) = \{(x, y, -3x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,0,-3) + y(0,1,-1)\}$$

Logo $m_g(\lambda_1) = 2$.

Já sabemos que $m_g(5) = m_a(5) = 1$

Vamos achar um autovalor associado a 5

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2y - z &= 0 \\ z &= 2y \end{aligned}$$

$$-3x + y + 2y = 0$$
$$-3x + 3y = 0 \Rightarrow y = x \quad \text{e}$$

$$\{(x,y,z) \mid (T - 5I)(x,y,z) = (0,0,0)\} =$$
$$\{y(1,1,2) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

A base $B = \{\underbrace{(1,0,-3)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,-1)}_{v_2}, \underbrace{(1,1,2)}_{v_3}\}$

é tal que $T(v_1) = -v_1$, $T(v_2) = -v_2$ e $T(v_3) = 5$

Logo $[T]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = D$

$$\underset{B}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{I} \underset{can}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{T} \underset{can}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{I} \underset{B}{\mathbb{R}^3}$$

$$[T]_B = [I]_{can,B} \, [T]_{can} \, [I]_{B,can}$$

$$P = [I]_{B,can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = P \qquad P^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \end{bmatrix} P = D$$