Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
7600023 - Termodinâmica e Física Estatística - 2023-2

Prof. Leonardo Paulo Maia

Prova 01 - 2023/10/16

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^\infty z^{p-1} \mathrm{e}^{-z}\, dz = (p-1)!} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = (1-\beta)^{-1}},\ |\beta| < 1$$

1. (2,5)

a Determine uma expressão geral para a covariância $\mathrm{cov}(X, Y)$ de duas variáveis aleatórias quaisquer X e Y (não necessariamente independentes) em termos das médias $\langle X \rangle$, $\langle Y \rangle$ e $\langle X.Y \rangle$. É preciso partir da definição, que não envolve essas quantidades, e obter uma expressão final que as exiba explicitamente. Quanto vale $\mathrm{cov}(X, Y)$ se X e Y forem independentes?

b Determine a variância $\mathrm{var}(X + Y)$ da soma de duas variáveis aleatórias quaisquer, X e Y, em termos de $\mathrm{cov}(X, Y)$ e das variâncias das parcelas da soma.

2. (4,0) Considere a variável aleatória τ (letra grega "tau"), que é o "tempo de espera até um sucesso", onde $p \in [0, 1]$ é a probabilidade de sucesso. Sua distribuição de probabilidade é dada por $\boxed{p_n \equiv \mathbb{P}(\tau = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p}$, com $n = 1, 2, \cdots$.

a Mostre que a distribuição de probabilidade $\{p_n\}$ está devidamente normalizada, como deveria.

b Calcule $\langle \tau \rangle$, a média de τ.

c Calcule $\mathrm{var}(\tau)$, a variância de τ.

d Calcule a função geradora de τ,

$$g_\tau(z) \equiv \sum_{n \in S_\tau} p_n z^n$$

onde S_τ é o espaço de realizações de τ.

e (apenas explicativo) Agora considere a variável aleatória T_k, que é o "tempo de espera até o k-ésimo sucesso". É possível mostrar (mas você não deve fazer isso!) que sua distribuição de probabilidade é dada por

$$\boxed{q_m \equiv \mathbb{P}(T_k = m) = \binom{m-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-k}},$$

com $m = k, k+1, k+2, \cdots$. A variável T é mais complexa do que τ e, comparativamente, seu estudo a partir de $\{q_m\}$ poderia exigir muito mais esforços do que o caso anterior. Porém, há um ponto de vista que pode simplificar muito o cálculo da média e da variância de T sem utilizar $\{q_m\}$! Note que T_1 é exatamente uma variável como τ. Além disso, após cada "sucesso", o "tempo aleatório de espera" também é uma variável aleatória que pode ser facilmente reconhecida.

f Expresse T_k como algum tipo de combinação de variáveis aleatórias mais simples (que devem ser adequadamente identificadas/indexadas) e determine $\langle T_k \rangle$ e $\mathrm{var}(T_k)$ a partir de características dessas componentes mais simples.

3. (3,5) *Distribuição de Maxwell 1D e 2D* - Vamos recordar a dedução da distribuição de velocidades (em módulo, $v > 0$) de Maxwell de um gás tridimensional termalizado à temperatura T e adaptá-la aos casos unidimensional e bidimensional. Tudo começa com um problema unidimensional e um fator de Boltzmann, $\mathrm{e}^{-\beta E}$, onde $\beta = (k_B T)^{-1}$, k_B é a constante de Boltzmann e E é a energia de uma partícula do fluido sob análise. A densidade de probabilidade $\rho_1(v_x)$ de uma partícula de velocidade v_x (que pode ser negativa, $-\infty < v_x < +\infty$) deve ser proporcional ao seu fator de Boltzmann.

a. Qual é a energia $E = E(m, v_x)$ de uma partícula livre de massa m que se move em uma dimensão com velocidade v_x? Dado que $\rho_1(v_x) = C \cdot \mathrm{e}^{-\beta E}$, onde C é uma constante de normalização, determine C.

b. Este item não pede respostas, é apenas explicativo! A famosa distribuição de velocidades de Maxwell para o **módulo** da velocidade de uma partícula em 3 dimensões, $v > 0$, é dada por

$$f_3(v) = 4\pi v^2 \cdot C^3 \cdot \exp\left\{-\frac{\beta m}{2} v^2\right\},$$

onde C é a mesma constante do item anterior. Ela é obtida em dois passos.

Primeiro, adota-se uma hipótese de independência estatística, que leva à construção da distribuição conjunta

$$\rho_3(v_x, v_y, v_z) = C^3 \cdot \exp\left\{-\frac{\beta m}{2} v_x^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\beta m}{2} v_y^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\beta m}{2} v_z^2\right\} =$$
$$= C^3 \cdot \exp\left\{-\frac{\beta m}{2} v^2\right\},$$

tal que $\rho_3(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$ é a probabilidade de ocorrência/observação de um vetor velocidade bem definido, de componentes cartesianas (v_x, v_y, v_z), $-\infty < v_x, v_y, v_z < +\infty$. Segundo, para eliminar a desnecessária informação sobre a direção do vetor velocidade, a "probabilidade por unidade de volume" $\rho_3(v_x, v_y, v_z)$ é multiplicada pelo volume infinitesimal $4\pi v^2 dv$ de uma casca esférica onde o módulo da velocidade é bem definido, v, e impõe-se que

$$f_3(v) dv = \rho_3(v_x, v_y, v_z) 4\pi v^2 dv.$$

c. Determine expressões $f_1(v)$ e $f_2(v)$ para as distribuições de probabilidade dos módulos das velocidades das partículas de gases termalizados em uma dimensão e duas dimensões, respectivamente. Por exemplo,

$$f_2(v) dv = \rho_2(v_x, v_y) \cdot (\text{área infinitesimal de um anel circular}).$$

Por outro lado, no caso 1D, v é simplesmente o módulo de v_x, $v = |v_x|$. Determine $\langle v \rangle$ e $\langle v^2 \rangle$ nos casos 1D e 2D.