

A dinâmica de um elipsoide em rotação

(Dynamics of a spinning ellipsoid)

Laysa G. Martins, José A.C. Nogales¹

Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, Brazil

Recebido em 2/10/2012; Aceito em 3/2/2013; Publicado em 26/9/2013

Um fenômeno físico interessante que contraria nosso senso comum concerne à dinâmica do movimento de um elipsoide em rotação numa superfície não lisa. Um elipsoide em rotação é, por exemplo, um ovo cozido, girando numa mesa de superfície áspera. Neste artigo, apresentamos uma explicação teórica da dinâmica do movimento desse elipsoide que descreve o fenômeno de elevação do eixo horizontal para a vertical. As equações de movimento foram estabelecidas utilizando o formalismo lagrangiano.

Palavras-chave: mecânica analítica, rotação de um corpo rígido, experimento caseiro.

An interesting physical phenomenon, which contradicts our common sense, is concerned with the dynamics of motion of a spinning ellipsoid in a non smooth surface. A hard-boiled egg spinning on a table with a rough surface is an example. In this article, we present a theoretical explanation of the dynamics of motion of this ellipsoid, that describes the axis raising phenomenon, from the horizontal to the vertical. The equations of motion were obtained with the Lagrangian formalism.

Keywords: analytical mechanics, rigid-body rotation, homemade experiment.

1. Introdução

A descrição histórica e qualitativa do movimento de rotação de um corpo rígido, do tipo pião “tippe top”, já é estudada há longo tempo. Há relatos que datam de 1800, quando Sir William Thomson e o professor Hugh Blackburn perceberam propriedades semelhantes às do movimento do pião “tippe top”, ao girarem pedras encontradas em praias. Entretanto, esse pião ainda não havia sido inventado nessa época [1]. Em 1890, John Perry escreveu um livro, “*Spinning Tops and Gyroscopic Motion*”, no qual há uma descrição de um objeto esférico que, quando girado sobre uma superfície, tal como uma mesa, terá uma elevação do centro de massa. Somente em 1892, o pião foi patenteado na Alemanha e, curiosamente, os modelos descritos no documento da patente pareciam que não estavam funcionando, sendo verificado mais tarde, que os modelos estavam, sim, em pleno funcionamento, somente que a descrição não havia sido feita corretamente no documento. De acordo com *Vendsyssel Historical Museum* na Dinamarca [2], o pião foi reinventado em 1949, pelo engenheiro dinamarquês, Werner Ostberg. Desde então, o pião ganhou grande popularidade em todo o mundo, despertando a curiosidade de muitas pessoas, veja a Fig. 1, motivando assim o estudo desse fenômeno e a partir disso foram publicados vários artigos [1]. Apenas em 2002, Moffatt

e Shimomura [3] apresentaram uma explicação para esse comportamento. No trabalho deles as equações de movimento foram obtidas a partir da segunda lei de Newton.



Figura 1 - Foto feita na inauguração do novo instituto de Física da Universidade de Lund, Suécia, em 31 de maio de 1951, onde Wolfgang Pauli e Niels Bohr observam o movimento do pião “tippe top” [1].

No presente artigo serão obtidas as equações de movimento, da elevação do eixo horizontal para a

¹E-mail: jnogales@dex.ufla.br.

vertical de um elipsoide rígido, utilizando as funções de Lagrange, ao invés das leis de Newton como foi feito por Moffatt e Shimomura [3]. Na seção seguinte, será feita uma descrição qualitativa do fenômeno físico e posteriormente, faremos uma apresentação matemática da geometria do problema, impondo considerações geométricas e definições dos sistemas de coordenadas que possibilitarão estabelecer a cinemática do sistema. Já para o caso da dinâmica serão utilizadas as funções de Lagrange, para determinar as equações de movimento. Mostraremos que toda a dinâmica pode ser estudada somente com uma variável, a qual descreve o ângulo de elevação do elipsoide. Ao se apresentar uma solução particular, verificaremos a existência de um invariante, conhecida como invariante de Jellett, o qual permitirá a integração do sistema. Por meio desse invariante, é possível considerar que o sistema corresponde à aproximação da condição de equilíbrio do giroscópio. Finalmente, faremos análises das equações obtidas, envolvendo as dimensões do elipsoide e a variação do seu ângulo de elevação ao longo de um intervalo de tempo, para diferentes coeficientes de atrito. A elevação do eixo horizontal para a vertical do elipsoide pode ser vista por meio de um vídeo, contendo um experimento qualitativo [4].

2. Descrição qualitativa do fenômeno

Para a descrição qualitativa da elevação do eixo horizontal para a vertical de um elipsoide rígido, analisaremos o movimento de um ovo cozido que é girado sobre uma superfície horizontal não lisa.

Quando um ovo cozido é girado sobre uma mesa com uma velocidade suficientemente alta, o seu eixo horizontal eleva-se e passa a ocupar a posição vertical, veja a Fig. 2. Em razão do giro do ovo em torno do seu centro de massa, o ponto de contato é arrastado ao redor da superfície, veja que o centro de massa e o ponto de contato não coincidem. Existe uma força de atrito que se contrapõe ao movimento do ovo, o efeito produzido por essa força de atrito no centro de massa, faz com que surjam componentes de torque, os quais atuam tangencialmente à superfície do ovo, o que permite a elevação do mesmo.

3. Geometria do fenômeno

Para encontrar as equações de movimento são consideradas as seguintes aproximações: o ovo será representado por um corpo rígido descrito na forma de um elipsoide prolato.

São escolhidos dois sistemas de coordenadas, sendo um deles OXYZ fixo no espaço e o outro Oxyz fixo no corpo. Esses dois sistemas de coordenadas possuem a

²Se existe um eixo de simetria em um corpo rígido, este será sempre um eixo principal, tendo, como propriedade importante, que a direção do momento angular é a mesma que a da velocidade angular.

³Neste artigo, todas as equações estão descritas em termos do sistema de coordenada OXYZ.

origem coincidente e esta está localizada no centro de massa do corpo. Na Fig. 3, ilustra-se esta descrição, sendo o eixo Oz simétrico.²

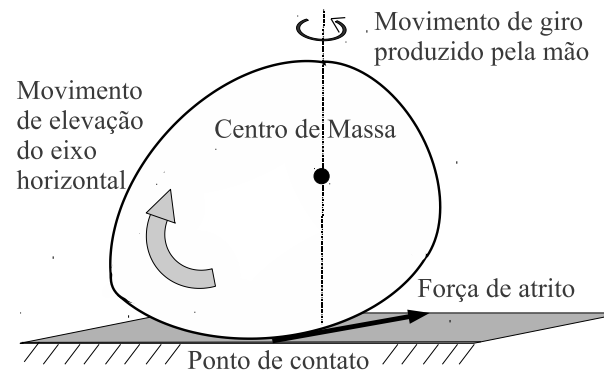


Figura 2 - Representação do centro de massa, do ponto de contato e da força de atrito no movimento de giro do ovo.

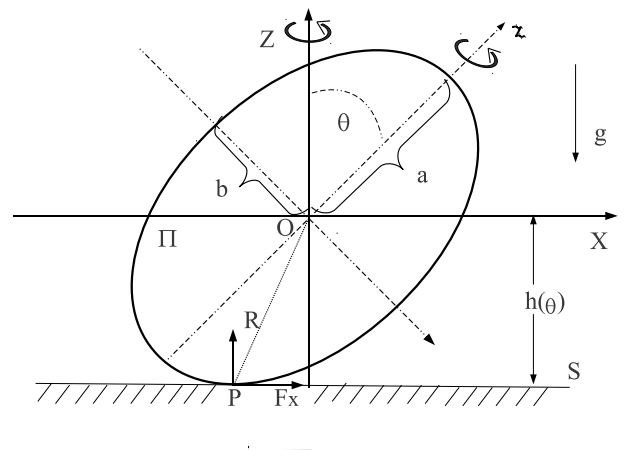


Figura 3 - Elipsoide de dimensões a e b sobre uma superfície S com ponto de contato P . Há dois sistemas de referência, OXYZ e Oxyz, sendo o eixo OX horizontal ao plano Π . A distância entre a superfície S e o eixo OX é dado por $h(\theta)$, onde θ é o ângulo de elevação do elipsoide.

Para uma pequena variação na orientação do corpo em relação à mesa, as coordenadas OX, OY, Oz para o ponto P são respectivamente³

$$X_p = \frac{dh}{d\theta}, Y_p = 0 \quad \text{e} \quad Z_p = -h(\theta). \quad (1)$$

Por meio da semelhança de triângulos retângulos, pode-se determinar a altura entre a origem O dos sistemas de coordenadas com a superfície S da mesa, encontrando

$$h(\theta) = (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad (2)$$

onde a e b são as dimensões do elipsoide e θ o ângulo que indica o comportamento de elevação do eixo horizontal (Oz) para a vertical (eixo Oz coincidindo com o eixo OZ).

Por meio da aproximação desse corpo rígido por um elipsoide prolato, têm-se que este possui a forma $a^2(x^2 + y^2) + b^2(z - d)^2 = a^2b^2$. Para um elipsoide uniforme $d = 0$, pois não haverá deslocamento do centro de massa no sistema OXYZ.

Para descrever o movimento de um corpo rígido, são necessários seis variáveis. Normalmente, três dessas variáveis são três coordenadas que localizam a posição do centro de massa que, nesse caso, coincidem com a origem do sistema de coordenada do corpo e três ângulos independentes que fornecem a orientação do sistema de coordenada fixo no corpo em relação ao sistema de coordenada fixo no espaço. Esses ângulos (φ, θ, ψ) são conhecidos como ângulos de Euler [5].

Como as origens dos sistemas de coordenadas coincidem, o vetor posição para um ponto qualquer do corpo rígido é dado por

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K}, \quad (3)$$

e a relação entre os sistemas de coordenadas para a posição, são

$$\begin{aligned} X &= x \cos \theta + z \sin \theta, & Y &= y & e \\ Z &= -x \sin \theta + z \cos \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Em termos dos vetores unitários, ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) e ($\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$) é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{k} \sin \theta, & \mathbf{J} &= \mathbf{j} & e \\ \mathbf{K} &= -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Finalmente, o vetor posição $\mathbf{X}_P = (X_p, Y_p, Z_p)$ que localiza o ponto de contato P, é

$$\begin{aligned} X_p &= x_p \cos \theta + z_p \sin \theta, & Y_p &= y_p & e \\ Z_p &= -x_p \sin \theta + z_p \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Dos ângulos de Euler pode-se perceber que φ representa a rotação em torno do eixo OZ , θ o ângulo de elevação e ψ é a composição da rotação em torno do eixo OZ e do eixo Oz . A relação entre esses ângulos e o eixo OZ é dada por

$$\Lambda = \dot{\theta}, \quad \Omega = \dot{\varphi} \quad e \quad n = \dot{\psi} + \Omega \cos \theta, \quad (7)$$

onde Ω é a taxa de variação do plano Π em relação ao eixo OZ , Λ é a taxa de variação da inclinação do eixo de simetria e n é o spin ao redor do eixo de simetria Oz do corpo.

As velocidades angulares dos sistemas de coordenadas OXYZ e Oxyz, são respectivamente,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{K} = -\Omega \sin \theta \mathbf{i} + \Omega \cos \theta \mathbf{k} \quad e \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \Lambda \mathbf{j}, \quad (8)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular total no sistema de coordenadas do corpo, que pode ser reescrito na forma de

$$\boldsymbol{\omega} = ((n - \Omega \cos \theta) \sin \theta, \dot{\theta}, \Omega \sin^2 \theta + n \cos \theta), \quad (9)$$

sabendo que $\dot{\theta}$ é a diferenciação feita em relação ao tempo. O momento angular é dado por $\mathbf{H} = I\boldsymbol{\omega}$, o qual possui as seguintes componentes

$$\mathbf{H} = ((Cn - A\Omega \cos \theta) \sin \theta, A\Lambda, \Omega \sin^2 \theta + Cn \cos \theta), \quad (10)$$

onde A e C são os principais momentos de inércia, posto que x e y são simétricos. Esses principais momentos de inércia podem ser calculados por meio dos eixos fixados no corpo e que giram com ele.

4. Equação de movimento

Para estabelecermos as equações de movimento, devemos inicialmente encontrar a lagrangiana do sistema, mas como o sistema tem força de atrito, precisaremos determinar as forças generalizadas, as quais são

$$F_\theta = Z_p F_x - X_p R, \quad (11)$$

$$F_\psi = x_p F_y, \quad (12)$$

$$F_\varphi = -z_p F_y \sin \theta + x_p F_y \cos \theta. \quad (13)$$

A obtenção dessas equações está contida no apêndice. Agora podemos estabelecer as equações de movimento utilizando as equações de Euler-Lagrange.

Vamos, primeiramente, encontrar a lagrangiana. Considere $\mathbf{U} = U\mathbf{I} + V\mathbf{J} + W\mathbf{K}$ a velocidade do centro de massa. A velocidade no ponto P pode ser encontrada pela equação que relaciona a velocidade do centro de massa com a rotação por

$$\mathbf{U}_P = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}_P = U_p \mathbf{I} + V_p \mathbf{J} + W_p \mathbf{K}, \quad (14)$$

onde

$$\begin{aligned} U_p &= U - \dot{\theta} h(\theta) \quad , \\ V_p &= V + H(\theta) \sin \theta (n - \Omega \cos \theta) + \Omega h'(\theta) \quad e \\ W_p &= W - \dot{\theta} h'(\theta). \end{aligned} \quad (15)$$

A lagrangiana é definida por $L = T - U'$, onde T é a energia cinética e U' a energia potencial. Sabe-se que a energia cinética de um corpo rígido pode ser determinada em termos da soma da energia cinética de translação (movimento do centro de massa) com a

energia cinética de rotação (variação angular). Logo, pode-se escrever

$$L = T - U' = \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{H}.$$

Note que a energia potencial U' é nula, em decorrência do sistema de coordenada escolhido. A lagrangiana em termos das coordenadas generalizadas é

$$L = L(X, Y, Z, U, V, W, \theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}).$$

Para determinar a lagrangiana, primeiro calcula-se

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} &= U^2 + V^2 + W^2 \\ \omega \cdot \mathbf{H} &= C\dot{\psi}^2 + A\Omega^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Escrevendo $\omega \cdot \mathbf{H}$ em termos das coordenadas generalizadas

$$\omega \cdot \mathbf{H} = C\dot{\psi}^2 + 2C\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta + C\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + A\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2,$$

Obtendo assim

$$L = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2 + C\dot{\psi}^2 + 2C\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta + C\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + A\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2).$$

Como, o movimento de giro de um esferoide, com giro suficientemente rápido, é caracterizado pela inexistência de movimento na direção \hat{K} , em razão de o ovo permanecer em contato com a superfície, a componente W_p dessa velocidade é nula. Portanto, a lagrangiana do sistema fica

$$L = \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + C\dot{\psi}^2 + 2C\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta + C\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + A\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + A\dot{\theta}^2). \quad (16)$$

Para determinar as equações de movimento, utiliza-se a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (17)$$

onde q_i são as coordenadas generalizadas e Q_i são as forças generalizadas dadas pelas Eqs. (11), (12) e (13).

As forças que atuam no corpo, no ponto P, são a reação normal $\mathbf{R} = (0, 0, R)$, o peso $\mathbf{W} = (0, 0, -Mg)$ e a força de atrito $\mathbf{F} = (F, F, 0)$, sendo que \mathbf{F} está em função de \mathbf{U}_p , a qual é dada pela lei de atrito dinâmico entre duas superfícies de contato, assumindo a condição $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_p \leq 0$, se $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_p = 0$ então \mathbf{F} e \mathbf{U}_p são ortogonais, onde \mathbf{U}_p é a velocidade no ponto P.

Vamos, agora, determinar as equações de movimento, usando a Eq. (17). Seja \mathbf{x} o vetor posição, então as equações de movimento associadas às coordenadas cartesianas são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{U} = (\dot{U} - \Omega V, \dot{V} + \Omega U, 0),$$

e como $Q_i = (F_x, F_y, R)$, então usando a Eq. (17) temos

$$(\dot{U} - \Omega V, \dot{V} + \Omega U, 0) = (F_x, F_y, R).$$

Logo, as equações de movimento são

$$\begin{cases} \dot{U} = \Omega V + F_x, \\ \dot{V} = -\Omega U + F_y \end{cases}$$

A equação de Lagrange para as componentes angulares, (θ, ψ, φ) , são respectivamente

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -C\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \theta - C\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + A\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = A\dot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = A\ddot{\theta}$$

Substituindo na Eq. (17), obtêm-se,

$$A\ddot{\theta} + C\dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \theta + C\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - A\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = Z_p F_x - X_p R. \quad (18)$$

Reescrevendo a equação acima em termos de Λ , Ω e n , teremos

$$A\dot{\Lambda} + C\Omega \sin \theta (n - \Omega \cos \theta) + C\Omega^2 \sin \theta \cos \theta - A\Omega^2 \sin \theta \cos \theta = Z_p F_x - X_p R. \quad (19)$$

Para determinar as equações de Lagrange para as componentes ψ e φ , procede-se analogamente ao processo feito para θ . Portanto encontra-se

$$\dot{\Lambda} = \frac{\Omega \sin \theta (A\Omega \cos \theta - Cn) + Z_p F_x - X_p R}{A}, \quad (20)$$

$$\dot{n} = \frac{x_p F_y}{C}, \quad (21)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{-2\Omega \Lambda \cos \theta + (C/A)n\Lambda + z_p F_y/A}{\sin \theta}. \quad (22)$$

Finalmente as equações de movimento são

$$\begin{cases} \dot{U} = \Omega V + F_x, \\ \dot{V} = -\Omega U + F_y, \\ \dot{\Omega} = \frac{[-2\Omega \Lambda \cos \theta + (C/A)n\Lambda + z_p F_y/A]}{\sin \theta}, \\ \dot{\Lambda} = \frac{[\Omega \sin \theta (A\Omega \cos \theta - Cn) - R X_p + Z_p F_x]}{A}, \\ \dot{\theta} = \Lambda, \\ \dot{n} = x_p F_y / C. \end{cases} \quad (23)$$

as quais são as mesmas encontradas por Moffatt e Shimomura, usando as leis de Newton. Dessas equações, pode-se perceber que, de fato, a força de atrito fornece contribuições para o movimento, seja este de translação (equações das acelerações do centro de massa) e de rotação (equações das acelerações dos ângulos de Euler). Para as equações que envolvem os ângulos de Euler, têm-se que as componentes da força de atrito e da reação normal provocam torques, em especial, a aceleração do ângulo θ , a qual determina a rapidez da variação do eixo horizontal para a vertical, que é dado pela composição dos torques que envolvem essas duas forças. A seguir, será feita uma análise mais detalhada da contribuição dada pela força de atrito.

5. Solução particular

Nesta seção, vamos descrever as considerações feitas por Moffatt e Shimomura. Para a componente U_p da velocidade tem-se que se θ for pequeno e se praticamente não houver variação do centro de massa, $U = 0$. Logo $U_p = 0$, para qualquer estado de estabilidade e a velocidade no ponto P passa a ser $\mathbf{U}_p = (0, V_p, 0)$. Como só há movimento na componente-Y, a força de atrito terá as seguintes componentes, $\mathbf{F} = (0, F, 0)$. Consequentemente, a Eq. (20) pode ser reescrita, obtendo

$$A\ddot{\theta} + \Omega \sin \theta (Cn - A\Omega \cos \theta) = -RX_p. \quad (24)$$

Além disso, consideramos que se a rapidez da variação do ângulo θ em relação ao tempo, for pequena, $|\dot{\theta}| \ll \Omega^2$, portanto o termo que contém $\ddot{\theta}$ pode ser negligenciado e se Ω^2 for considerado grande, então este dominará o termo $-RX_p$ dado pela Eq. (20) resultando em um equação de primeira ordem, $(Cn - A\Omega \cos \theta)\Omega \sin \theta = 0$. Mas, necessariamente, $\sin \theta \neq 0$, pois deseja-se estudar o mecanismo que ocorre durante a elevação do eixo, assim

$$Cn = -A\Omega \cos \theta, \quad (25)$$

sendo essa a condição de equilíbrio do giroscópio, na qual as resultantes das forças externas e torques externos que agem sobre o corpo são nulas. Nessa situação, a energia cinética é bem maior que a energia potencial, pois os efeitos produzidos pela força de Coriolis superam os efeitos gerados pela força de atrito e gravitacional, permitindo uma aproximação para a condição de equilíbrio do giroscópio, esta encontrada por Moffatt e cols. [6], a partir de $|\dot{\theta}| \ll \Omega^2$ e portanto, $\Omega^2 \gg [5g | a^2 - b^2 | / [(a^2 + b^2) \min(ab)]]$.

Utilizando a condição dada por (25), o momento angular passa a ser para as Eqs. (20) e (22), respectivamente,

$$A \frac{d}{dt} [\Omega \sin \theta] = -FZ_p \quad \text{e} \quad C \frac{d}{dt} [(A/C)\Omega \cos \theta] = -FX_p,$$

porém, se a variação de θ for lenta, então $\theta \approx 0$ e as equações acima tornam-se, $A\Omega\dot{\theta} = FZ_p$ e $A\dot{\Omega} = FX_p$, se esse resultado for integrado em ambos os lados, obter-se-á $A\Omega h(\theta) = \text{constante}$. Essa constante não depende da natureza da força de atrito e é conhecida como invariante de Jellett. Tal constante foi encontrada anteriormente e é

$$J = -\mathbf{H} \cdot \mathbf{X}_p = A\Omega h. \quad (26)$$

Mas, para satisfazer a condição (25) de equilíbrio do giroscópio $dJ/dt = 0$ e assim $J = \text{constante}$.

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= (A\Omega \cos \theta - Cn)(h'' \sin \theta - h' \cos \theta)\dot{\theta} \\ &= (Cn - A\Omega \cos \theta)h'^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin \theta}{h'(\theta)} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Por outro lado, o estado de estabilidade a velocidade V do centro de massa, para o caso do esferóide é nula, então a velocidade V_p torna-se,

$$V_p = (\Omega \sin^2 \theta + n \cos \theta)dh/d\theta + (n - \Omega \cos \theta)h(\theta) \sin \theta. \quad (28)$$

Utilizando as Eqs. (25), (26) e (28) e fazendo $\zeta(\theta) = (\sin^2 \theta + (A/C) \cos^2 \theta)^{-1/2}$ a velocidade V_p pode ser reescrita como,

$$V_p = (J/A)\zeta^{-3}h^{-1}d(\zeta h)/d\theta. \quad (29)$$

Substituindo as Eqs. (1) e (27) na equação $A\Omega\dot{\theta} = FZ_p$, obtém-se:

$$J\dot{\theta} = -Fh^2(\theta). \quad (30)$$

Esta é a solução dinâmica do sistema analisado. Agora, precisamos estabelecer a força de atrito para integrar o sistema. Para isso, foram consideradas duas alternativas para a força de atrito. A primeira, quando esta admite a lei de Coulomb [7, 8], $F = -\mu MgV_p/|V_p|$, obtendo a solução para a Eq. (30),

$$\tan \theta = (a/b) \tan \mu q(t - t_0), \quad (31)$$

onde $q = Mgab(a - b)/|a - b||J|$ e t_0 é uma constante de integração. Para o intervalo de tempo finito, $\Delta t = \pi/2|\mu q|$, a solução (31) representa a transição do estado instável para o estado estável. No entanto, há regiões onde V_p é zero, nos quais a Eq. (31) não é analítica, impossibilitando uma análise para estados estacionários.

A segunda alternativa é quando a força de atrito assume a lei de atrito viscoso [7, 8], dado por $F = -\mu MgV_p$, que, quando integrado, resulta em,

$$\tan \theta = e^{-\mu q(t-t_0)}, \quad (32)$$

onde $q = 5g(a^2 - b^2)/2(a^2 + b^2)$. A relação (32) mostra que o ângulo θ depende das dimensões do elipsoide, da gravidade e do coeficiente de atrito.

A seguir, faremos a análise numérica da solução para as duas alternativas e observaremos o comportamento do elipsoide. Considerando um valor fixo para a gravidade em Lavras/MG, $g = 9,78 \text{ m/s}^2$, foram plotados gráficos que retratam a variação do ângulo θ para um dado intervalo de tempo, com coeficientes de atrito 0,5; 0,1 e 0,05 e fazendo $a = 6,5 \text{ cm}$ e $b = 4,5 \text{ cm}$.

Na Fig. 4, mostra-se que quanto maior o coeficiente de atrito, mais tempo será necessário para que ocorra a elevação do eixo horizontal para a vertical, isto é, variações no ângulo θ . Por exemplo, vemos que, a medida que o coeficiente de atrito diminui, o tempo de elevação para um dado ângulo aumenta de um fator de 5. Já, na Fig. 6, o fator de acréscimo no tempo é de 10.

No caso em que se utiliza o semieixo maior com $a = 6,5 \text{ cm}$ na Fig. 4, comparado com o semieixo maior $a = 5,5 \text{ cm}$ na Fig. 6, e mantendo fixo $b = 4,5 \text{ cm}$, percebe-se que quanto mais comprido o semieixo maior, menor será o tempo gasto para a elevação do eixo da horizontal para a vertical. Para o caso de $a = 5,5 \text{ cm}$, da Fig. 6, novamente reparamos que quanto menor o coeficiente de atrito,⁴ maior será o tempo de rotação do elipsoide.

Se considerarmos o caso especial em que $a = b + \delta$, limite especial para esfera, $\delta \rightarrow 0$ com $\delta \neq 0$, teremos

$$\begin{aligned} q &= \frac{5g(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)} \Rightarrow q = \frac{5g(b^2 + 2b\delta + \delta^2 - b^2)}{2(b^2 + 2b\delta + \delta^2 + b^2)}, \\ q &= \frac{5g}{2} \left(\frac{\delta}{b + \delta} \right) = \frac{5g}{2b} \left[1 - \frac{\delta}{b} \right], \\ q &= \frac{5g}{2b} \delta, \end{aligned} \quad (33)$$

onde δ é uma pequena variação no raio da esfera e δ^2 é desprezível. Substituindo a Eq. (33) na Eq. (32), verifica-se que esse resultado não satisfaz a condição de equilíbrio do giroscópio, pois se $\delta \rightarrow 0$ teremos que $q \rightarrow 0$, assim $\Omega^2 \rightarrow 0$. Quando $\delta \neq 0$ e é um valor pequeno, podemos analisar esse movimento por meio da análise numérica da equação dada por

$$\tan \theta = e^{-\mu(5g/2b)\delta(t-t_0)}.$$

São utilizadas as mesmas considerações feitas nas duas análises numéricas acima, isto é, $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ e coeficientes de atrito 0,5; 0,1 e 0,05, como mostrado na Fig. 5.

Observa-se na Fig. 5, que ao se fazer a aproximação para uma esfera, o tempo gasto para atingir o estado de elevação do eixo horizontal para a vertical é bem maior quando comparado com o tempo gasto pelo elipsoide. E quanto menor o coeficiente de atrito, mais tempo é necessário para que ocorra essa elevação. Assim torna-se difícil visualizar esse movimento em um experimento real, visto que a elevação em si, é rápida e também pela própria simetria da esfera.

⁴O coeficiente de atrito, para esse caso, não deve ser nulo.

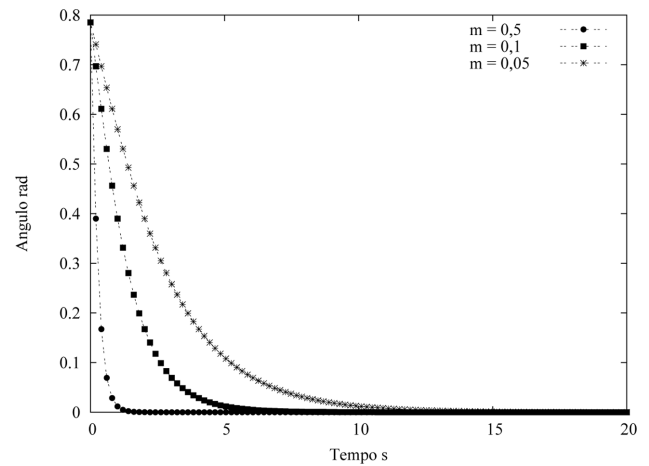


Figura 4 - Representação da variação do ângulo de elevação θ , ao longo do tempo t , com as dimensões espaciais de 6,5 cm e 4,5 cm. Sendo os valores de 0,5; 0,1 e 0,05 ilustrados por uma linha com pontos, uma linha com quadrados e uma linha com asteriscos, respectivamente.

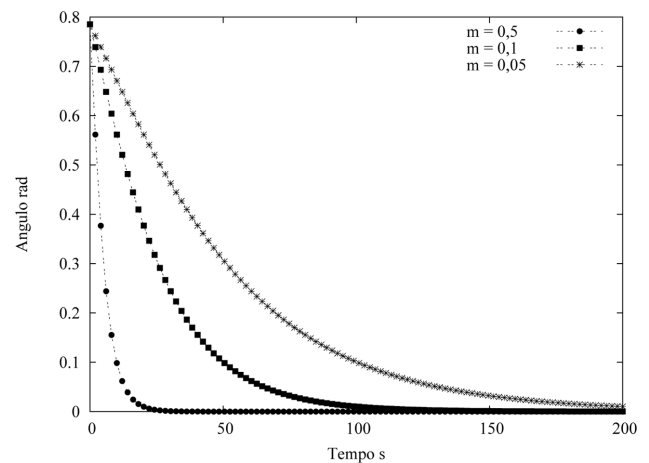


Figura 5 - Representação da variação do ângulo de elevação θ ao longo do tempo t , quando $a = b + \delta$ com $\delta \rightarrow 0$, para o caso de uma esfera. Sendo os valores de 0,5; 0,1 e 0,05 ilustrados por uma linha com pontos, uma linha com quadrados e uma linha com asteriscos, respectivamente.

Análises e conclusões

O fenômeno discutido neste artigo foi foco de estudos durante um longo tempo, sendo encontrada a solução apenas em 2002, a partir das leis de Newton. Neste trabalho, foram utilizadas as funções de Lagrange, cujo lagrangiana do sistema é dado pela Eq. (16), para determinar as equações de movimento, as quais conferem com as encontradas por Moffatt e Shimomura. Ao se encontrar as equações de movimento, estudamos um caso particular, onde a integração do sistema só foi possível em decorrência do invariante de Jellett.

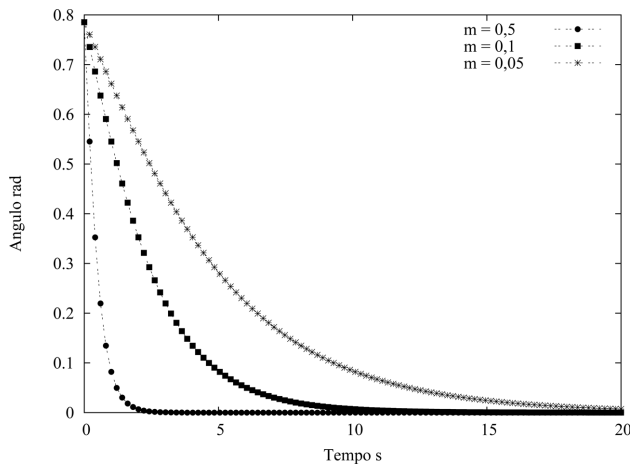


Figura 6 - Representação da variação do ângulo de elevação θ ao longo do tempo t , com as dimensões espaciais de 5,5 cm e 4,5 cm. Sendo os valores de 0,5; 0,1 e 0,05 ilustrados por uma linha com pontos, uma linha com quadrados e uma linha com asteriscos, respectivamente.

A solução encontrada descreve a elevação do eixo horizontal para a vertical, durante o movimento de precessão, com a condição de equilíbrio sendo satisfeita. Por exemplo, para um ovo cru essa condição de equilíbrio não pode ser satisfeita, pois a energia transmitida para girar o ovo é dissipada pelo seu fluido interior.

Para observar de forma qualitativa o fenômeno descrito nessa teoria, foi feito um experimento demonstrativo, onde utilizamos diferentes coeficientes de atrito, tais como: uma superfície com atrito desprezível, mas não nulo, e superfícies rugosas, como por exemplo, folhas de lixa. Podendo observar experimentalmente que quanto maior o coeficiente de atrito, menor o tempo de

elevação do eixo horizontal para a vertical, como descrito na teoria. Acesse o link da Ref. [4] e assista ao vídeo.

Os métodos e resultados deste trabalho podem ser utilizados numa disciplina de mecânica teórica, quando se estuda o tópico da dinâmica de um corpo rígido.

Apêndice

Para descrever a dinâmica de um corpo rígido qualquer, pode-se trabalhar com os ângulos de Euler θ, ψ, φ [9]. Considere a figura abaixo:

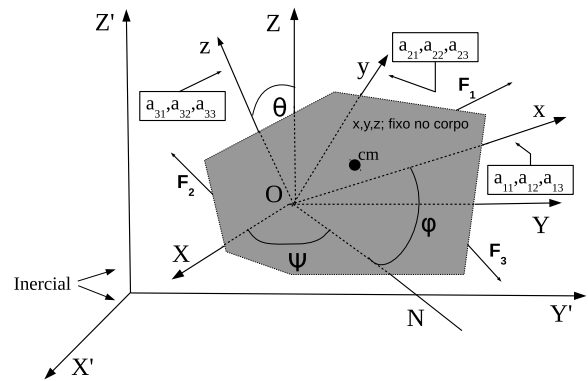


Figura 7 - Esse corpo rígido realiza um movimento decorrente da ação de forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ e \mathbf{F}_3 . O sistema de coordenadas $Oxyz$ está fixo no corpo, sendo que a origem é coincidente com a origem do sistema $OXYZ$, o qual é paralelo ao sistema inercial $O'X'Y'Z'$. Sejam a_{11}, a_{12}, a_{13} os cossenos diretores de Ox relativos a $OXYZ$.

O sistema de coordenadas $OXYZ$ é fixo no espaço e o sistema $Oxyz$, fixo no corpo. A relação entre esses dois sistemas de coordenadas, envolvendo os ângulos de Euler, é dada pela matriz de transformação \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta & \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \cos \theta & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Considere que as componentes $f'_{xi}, f'_{yi}, f'_{zi}$ de F_i , sejam paralelas a X, Y, Z e as coordenadas x_i, y_i, z_i dos pontos de aplicação de p_i relativos a x, y, z , sejam conhecidos. As forças generalizadas correspondentes para x_1, y_1, z_1 , são

$$F_{x1} = \sum f'_{xi}, \quad F_{y1} = \sum f'_{yi} \quad \text{e} \quad F_{z1} = \sum f'_{zi}.$$

Para descobrir F_θ , por exemplo, procede-se da maneira a seguir. A componente do vetor torque total, ao redor do eixo x , é dado por $\tau_x = \sum (f_{zi}y_i - f_{yi}z_i)$, onde f_{xi} é a componente de F_i na direção do eixo X do sistema de coordenadas fixo no corpo. Mas $f_{xi} = f'_{xi}\alpha_{11} + f'_{yi}\alpha_{12} + f'_{zi}\alpha_{13}, \dots$ para f_{yi} e f_{zi} . Após determinado τ_x, τ_y, τ_z , encontra-se $\tau_\theta = \tau_x \cos \psi - \tau_y \sin \psi = F_\theta$.

Pode-se encontrar expressões similares para τ_φ e τ_ψ , tal que

$$F_\theta = \tau_x \cos \psi - \tau_y \sin \psi, \quad F_\psi = F_z.$$

$$F_\varphi = \tau_x \sin \theta \sin \psi + \tau_y \sin \theta \cos \psi + \tau_z \cos \theta. \quad (34)$$

Para calcular τ_x, τ_y, τ_z , faz-se

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbf{X}_P \wedge \mathbf{F}' = (X_p, 0, Z_p) \wedge (F_x, F_y, R) \\ &= -Z_p F_y \mathbf{I} + (Z_p F_x - X_p R) \mathbf{J} + X_p F_y \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (35)$$

onde X_p é o vetor posição que localiza o ponto P e \mathbf{F}' possui as componentes das forças que atuam no corpo. Utilizando as Eqs. (1) e (5), pode-se escrever

$$\tau = -z_p F_y \mathbf{i} + (Z_p F_x - X_p R) \mathbf{j} + x_p F_y \mathbf{k}. \quad (36)$$

Neste artigo, foi enfatizado o comportamento da dinâmica para o ângulo θ , considere então $\psi = \frac{3\pi}{2}$. Substituindo o valor de ângulo ψ e a Eq. (36), têm-se

$$F_\theta = \tau_y = Z_p F_x - X_p R, \quad F_\psi = \tau_z = x_p F_y,$$

$$F_\varphi = -\tau_x \sin \theta + \tau_z \cos \theta = -z_p F_y \sin \theta + x_p F_y \cos \theta.$$

Portanto, F_θ , F_ψ , F_φ são as forças generalizadas.

Agradecimento

Agradecemos a Prof. Dra. Karen Luz Burgoa Rosso, do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Lavras pela gentileza de realizar e orientar as construções das figuras presentes neste artigo, além de ler todo o trabalho e fazer as correções necessárias e também pelas observações de ordem estética.

Referências

- [1] *The Tipped Top*. Disponível em <http://www.fysikbasen.dk/English.php?page=Vis&id=79>. Acesso em 7/2012.
- [2] *Vendsyssel Historical Museum*. Disponível em <http://www.vhm.dk/page.asp?objectid=673&zcs=2>. Acesso em 7/2012.
- [3] H.K. Moffatt and Y. Shimomura, *Nature* **416**, 385 (2002).
- [4] Link para o vídeo do youtube: <http://youtu.be/NntiC4X-f9Y>.
- [5] J.B. Marion and S.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Thomson Brooks/Cole, University of Virginia, 2003), 5^a ed.
- [6] H.K. Moffatt, Y. Shimomura and M. Branicki, *The Royal Society* **460**, 3643 (2004).
- [7] L.F.F. Miguel and J.D. Riera, *Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil* **8**, 57 (2008).
- [8] J.C. Viegas, *Tribologia* (Escola Superior de Tecnologia de Setúbal, Setúbal). Disponível em lodi.est.ips.pt/jviegas/_private/folhas_tribologia.pdf. Acesso em 7/2012.
- [9] D.A. Wells, *Theory and Problems of Lagrangian Dynamics* (McGraw-Hill, New York, 1967).