P2 - Matemática I - CCM - 2023

Dezembro 2023

P2 - Matemática I - CCM - 2023 : Instruções

- Você pode usar o que quiser para entender e resolver as questões da prova: livros, colegas, a monitora, eu, chatgpt, oráculos, búzios, etc.
- Depois disso, cada um escreve suas resoluções, desde que tenha entendido o que está escrevendo.
- Dê crédito a quem crédito é devido.
- Entregue a prova resolvida em um arquivo pdf não muito grande, escrita (e escaneada, se for o caso) com capricho, no dia 06/01/2024.
- A prova pode ser feita em duplas.
- Aprender é uma das coisas mais interessantes e prazerosas da vida. Não perca isso de vista enquanto faz a prova. Divirta-se.

Q1 Seja $f(x) = -x^4 + x^3 + 6x$ uma função polinomial definida em $\mathbb{R}$.

(a) Para cada uma das funções f, f', f'' encontre as raízes quando possível ou especifique um intervalo de tamanho 0,5 que a contenha.

(b) Leia sobre o Método de Newton (ou Newton-Raphson) em algum lugar e use-o para encontrar aproximações das raízes positivas de f e de f' que estejam corretas até a quinta casa após a vírgula. Você não precisa provar que chegou a essa precisão, mas explique por que acredita que chegou.

(c) Encontre os intervalos nos quais f é crescente, decrescente, côncava e convexa.

(d) Esboce os gráficos de f e f', apontando as propriedades obtidas nos itens anteriores.

(e) No intervalo $[-0.5, 2]$, determine os valores máximos e mínimos de f e f' e encontre, se houver, outros max/min locais.

Q2 Sejam $f, g : [0,1] \to [0,1]$ funções contínuas e suponha que $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$ ou que $g(0) = 1$ e $g(1) = 0$. Prove que existe $\bar{x} \in [0,1]$ tal que $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$.

Q3 Calcule a derivada das seguintes funções (da variável x):

(a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$

(b) $\operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen} x))))$

(c) $\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}\ (\operatorname{sen} x)^{1/2}}{1 + (\cos x)^2}$

(d) $\left(\cos\left(x^{254}\right)\right)^{32}$

Q4 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(a) Mostre que $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

<u>Sugestão</u>: Considere dois casos: $x \neq 0$ e $x = 0$.

(b) Mostre que f' não é contínua em $x = 0$.

(c) Mostre que tanto f quanto f' satisfazem o Teorema do Valor Intermediário, isto é, para $g = f$ ou f' vale a seguinte afirmação:

se $a, b \in \mathbb{R}$ e $g(a) < v < g(b)$ para algum $v \in \mathbb{R}$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = v$.

(d) Exiba uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é diferenciável e tal que $\varphi' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também seja diferenciável, mas $\varphi'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é contínua.

Q5 (a) Suponha que f é integrável e g é diferenciável e defina

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{e} \quad G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

Mostre que

$$G'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

(b) Use (a) para derivar

$$G(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen}^2 t\,dt.$$

Q6 Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial mônica, isto é, cujo coeficiente do termo de maior grau é 1). Decida se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Se verdadeira, dê uma demonstração; se falsa, um contra-exemplo.

(a) Se n é ímpar então p tem ao menos uma raiz (i.e. $\exists \bar{x}$ tq. $p(\bar{x}) = 0$).

(b) Se n é ímpar e grande o bastante, então p tem pelo menos 3 raízes distintas.

(c) Se n é par, então p tem pelo menos duas raízes.

(d) Se n é ímpar, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que p é crescente e côncava em $(-\infty, -M)$.

(e) Se n é par e $M \in \mathbb{R}$ é grande o bastante p é crescente e convexa em $\{x \in \mathbb{R} : |x| > M\}$.

(f) Se n é par então p assume um valor mínimo, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) \geq p(c)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(g) A afirmação em (f) vale para n ímpar também e portanto vale para todo $n \in \mathbb{N}$.