Seleção de Exercícios - P2

3.1.6

(1) Prove que são transformações lineares:

a) $F: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, $F(p(t)) = t^2 p''(t)$.

R: $P_2(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial: polinômios de grau $n \leq 2$ a coeficientes constantes. Sabemos também que a derivada é uma transformação linear, pois

$$\frac{d}{dt}(p(t)+q(t)) = \frac{d}{dt}p(t) + \frac{d}{dt}q(t) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}(\alpha p(t)) = \alpha \frac{d}{dt}p(t).$$

Com isso, mostramos a linearidade de F:

- $F(p(t)+q(t)) = t^2[p(t)+q(t)]'' = t^2 p''(t) + t^2 q''(t) = F(p(t)) + F(q(t))$,
- $F(\alpha p(t)) = t^2[\alpha p(t)]'' = t^2 \alpha p''(t) = \alpha F(p(t))$. ∎

b) $F: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $F(X) = MX - XM$ com $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned} F(X+Y) &= M(X+Y) - (X+Y)M \\ &= MX + MY - XM - YM \\ &= (MX - XM) + (MY - YM) \\ &= F(X) + F(Y). \end{aligned}$$

- $F(\alpha X) = M(\alpha X) - (\alpha X)M = \alpha MX - \alpha XM = \alpha F(X)$. ∎

c) $T: P_3(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$, $(Tp)(x) = x\,p(x+1)$.

$\cdot\ (T(p+q))(x) = x(p+q)(x+1) = x\,p(x+1) + x\,q(x+1) = (Tp)(x) + (Tq)(x)$

$\cdot\ (T\alpha p)(x) = x(\alpha p(x+1)) = \alpha\, x p(x+1) = \alpha (Tp)(x)$.

② $T: U \to V$ com U, V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $\dim_{\mathbb{K}} V < \dim_{\mathbb{K}} U < \infty$.

a) Prove que $\exists u \in U$, $u \neq \vec{0}_U$, tal que $T(u) = \vec{0}_V$.

R: Queremos provar que $\dim \operatorname{Ker}(T) > 0$, ie. $\ker T = \{\vec{0}_U, u\}$.

(posso ter mais de um vetor $u \neq \vec{0}_V$)

Pelo teorema do núcleo e da imagem,

$$\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim U.$$

Mas $\dim \operatorname{Im}(T) \leq \dim V < \dim U \Rightarrow \dim U - \dim \operatorname{Im}(T) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(T) > 0$. Logo existe $u \neq 0$ tal que $T(u) = 0$.

b) Não necessariamente. Pense em $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$T(x,y,z) = (xy, z)$. A base de U $\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$

não tem vetor $\hat{e}_j \neq 0$ tal que $T(\hat{e}_j) = 0$, mas vemos que

$u = (0,1,0) \neq 0$ é vetor do núcleo de T.

③ Para $\ker T = V$, qualquer vetor $v \in V$ será tal que $T(v) = 0$.

Como $V = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right]$, $v = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\beta\\\alpha-\beta\\\alpha-\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}$.

Por outro lado, $\operatorname{Im} T = W$, logo $T(u) = w$ $\forall u \in \mathbb{R}^4$ e $w \in W$,

$w = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-x\\-t\\t\end{pmatrix}$. Espero que não seja muito difícil ver que

$$T\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1+u_2-u_3\\-(u_1+u_2-u_3)\\u_3-u_4\\-(u_3-u_4)\end{pmatrix}$$

obedece a ambos os requisitos. Veja que o vetor resultante pertence a W pois segue a estrutura de todo $w \in W$ e que

$$T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1+v_2-v_3\\-v_1-v_2+v_3\\v_3-v_4\\v_4-v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-\beta-(\alpha-\beta)\\-\alpha+\beta+(\alpha-\beta)\\\alpha-\beta-(\alpha-\beta)\\\alpha-\beta-(\alpha-\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

④ a) $T(x,y) = (x-y, x+y)$

Ker T: $\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x-y=0\\x+y=0\end{cases} \Rightarrow x=y=0$

$\therefore \ker T = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Im T: Como $\dim \ker T = 0$, o teorema do núcleo e da imagem nos dá que $\cancel{\dim \ker T}^{\,0} + \dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^2$, então $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.

Notem que isso vale porque dizer que $\dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^2$ significa dizer que quaisquer bases de $\operatorname{Im} T$ e $\mathbb{R}^2$ têm mesmo número de vetores l.i., e sendo sempre $\operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{R}^2$, não teria como $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}^2$.

b) $T(x+yi, z+ti) = (x+2z, -x+2t)$.

Ker T: $\begin{cases} x+2z=0 \\ -x+2t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x=2z \\ -x+2t=0 \end{cases} \Rightarrow 2(z+t)=0 \Rightarrow z=-t.$

logo $x=-2(-t)=2t$ e $\operatorname{Ker} T = \{(2t+yi, -t+ti) : y,t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{ t(2, i-1) + y(i,0) : y,t \in \mathbb{R} \}$.

Ou seja, $\dim \operatorname{Ker} T = 2$, pois $\{(2,i-1), (i,0)\}$ é base. Sendo $\dim \mathbb{C}^2 = 4$, pois $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ é base de $\mathbb{C}^2$, então

$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} T}_{=2} + \dim \operatorname{Im} T = \underbrace{\dim \mathbb{C}^2}_{=4} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Repito o argumento anterior que $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.

OBS: Se não convenci plenamente, mostrem que T tem a base canônica de $\mathbb{R}^2$ no conjunto $\operatorname{Im} T$.

(10) $T: V \to V$ para V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Mostre que são equivalentes

a) $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$

b) Se $(T \circ T)(v) = 0$ para $v \in V$, então $T(v) = 0$.

a) $\Rightarrow$ b)

$(T \circ T)(v) = T(T(v)) = 0$. Suponha que $T(v) = u \neq 0$ para algum $v \in V$, então $T(v) = u \Rightarrow T(u) = 0$. Logo $u \in \operatorname{Im} T$ e $u \in \ker T$, tal que $\ker T \cap \operatorname{Im} T \neq \{0\}$, o que contradiz a hipótese. Portanto se $(T \circ T)(v) = 0$, então $T(v) = 0$.

b) $\Rightarrow$ a)

Suponha que exista $u \neq 0$ tal que $u \in \ker T$ e $u \in \operatorname{Im} T$. Então $T(u) = 0$ e, para algum v, $T(v) = u$. Mas então $T(T(v)) = (T \circ T)(v) = 0$ em que $T(v) = u \neq 0$, contradizendo a hipótese. Portanto não existe tal u e $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

3.3.7

d) $F(x,y,z) = (x-3y-2z,\ y-4z,\ -z)$.

F é inversível $\Leftrightarrow$ F é bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora.

- F é injetora $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} F = \{0\}$.

$$F(x,y,z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3y-2z=0 \\ y-4z=0 \\ -z=0 \end{cases} \Rightarrow z=0,\ y=0,\ x=0$$

portanto $\operatorname{Ker} F = \{0\} \Rightarrow$ F é injetora.

- F é sobrejetora $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} F = \dim \mathbb{R}^3$. Como $\dim \operatorname{Ker} T = 0$ e $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, segue do teorema do núcleo e da imagem que $\dim \operatorname{Im} F = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ F é sobrejetora.

Portanto, F é inversível. Como é F^{-1}? Sejam $x' = x-3y-2z$, $y' = y-4z$ e $z' = -z$,

$$F(x,y,z) = (x',y',z') \Leftrightarrow F^{-1}(x',y',z') = (x,y,z).$$

Isolando x, y, z, $z = -z' \rightarrow y = y'+4z = y'-4z' \rightarrow$

$\rightarrow x = x'+3y+2z = x'+3(y'-4z')-2z' = x'+3y'-14z'$.

Portanto, $F^{-1}(x',y',z') = (x'+3y'-14z',\ y'-4z',\ -z')$. Ou apenas

$$F^{-1}(x,y,z) = (x+3y-14z,\ y+4z,\ -z).$$

② $T(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1)$ é isomorfismo se for bijeção.

$\ker T = \{0\}$, pois $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$, então T é injetora. Além disso,

$$\underbrace{\cancel{\dim \ker T}}_{0} + \dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{K}^2$$

com $T: \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ implica que $\operatorname{Im} T = \mathbb{K}^2$ e T é sobrejetora.

Portanto, T é isomorfismo e admite inversa T^{-1}:

$$T^{-1}(x_1+x_2, x_1) = (x_1, x_2) \Rightarrow T^{-1}(x_1,x_2) = (x_2, x_1-x_2)$$

④ $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $T(1,0,0) = (1,0,i)$; $T(0,1,0) = (0,1,1)$; $T(0,0,1) = (i,1,0)$. Qualquer $v \in \mathbb{C}^3$ pode ser expresso por

$$T\big(\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)\big) = (\alpha + \gamma i,\ \beta+\gamma,\ \alpha i + \beta)$$

tal que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, logo $T(v) = 0$ é

$$\begin{cases} \alpha + \gamma i = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\alpha) + i\operatorname{Im}(\alpha) + i\operatorname{Re}(\gamma) - \operatorname{Im}(\gamma) = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\beta) + i\operatorname{Im}(\beta) + \operatorname{Re}(\gamma) + i\operatorname{Im}(\gamma) = 0 \\ \alpha i + \beta = 0 \Rightarrow i\operatorname{Re}(\alpha) - \operatorname{Im}(\alpha) + \operatorname{Re}(\beta) + i\operatorname{Im}(\beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\operatorname{Re}(\alpha) - \operatorname{Im}(\gamma)) + i(\operatorname{Re}(\gamma) + \operatorname{Im}(\alpha)) = 0 \\ (\operatorname{Re}(\beta) + \operatorname{Re}(\gamma)) + i(\operatorname{Im}(\beta) + \operatorname{Im}(\gamma)) = 0 \\ (\operatorname{Re}(\beta) - \operatorname{Im}(\alpha)) + i(\operatorname{Re}(\alpha) + \operatorname{Im}(\beta)) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

que vira um sistema de 6 equações com soluções $Re(\alpha) = Im(\gamma) = -Im(\beta)$ e $Re(\gamma) = -Im(\alpha) = -Re(\beta)$.

Nesse caso, o núcleo de T tem mais elementos que $\{0\}$, logo T não é injetora, logo não é bijetora, logo não admite inversa.

(completarei o resto depois!)