Seleção de exercícios

Preparativos para a P2 (Matemática III)

3.1.6

1. Prove que cada uma das transformações abaixo é linear.

(a) $F : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $F(p(t)) = t^2 p''(t)$

(b) $F : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX - XM$ onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $T : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_4(\mathbb{R})$ dada por $(Tp)(x) = xp(x+1)$.

2. Consideremos uma transformação linear $T : U \to V$ onde U e V são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais tais que $\dim_{\mathbb{K}} V < \dim_{\mathbb{K}} U < \infty$.

(a) Prove que existe um elemento não nulo $u \in U$ tal que $T(u) = 0$.

(b) Se $\mathscr{B}$ é uma base arbitrária de U, existe sempre um vetor $u \in \mathscr{B}$ tal que $T(u) = 0$? Prove ou dê um contraexemplo.

3.2.6

3. Considere $\mathbb{R}^4$ e seus subespaços $V, W \subset \mathbb{R}^4$, $V = [(1,0,1,1),(0,-1,-1,-1)]$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } t + z = 0\}$. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\ker T = V$ e $\operatorname{Im} T = W$.

OBS: $V = [v_1, v_2]$ é o subespaço gerado pela combinação linear dos vetores v_1 e v_2. $\ker T$ é o *kernel* ou núcleo de T e $\operatorname{Im} T$ é o conjunto imagem de T.

4. Determine o núcleo e a imagem das seguintes transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x - y, x + y)$

(b) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x + yi, z + ti) = (x + 2x, -x + 2t)$.

10. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to V$ uma transformação linear. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$

(b) Se $(T \circ T)(v) = 0$ para $v \in V$, então $T(v) = 0$.

3.1.6

1. Mostre que a transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a seguir é invertível e determine a transformação linear inversa.

- $F(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, -z)$

2. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $T : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ o operador dado por $T(x_1, x_2) = (x_1+x_2, x_1)$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$. Prove que T é um isomorfismo e exiba T^{-1}.

4. Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ a transformação linear definida por $T(1, 0, 0) = (1, 0, i)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$, $T(0, 0, 1) = (i, 1, 0)$. Decida se T é invertível.

5. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares. Prove que $S \circ T$ não é invertível.

3.4.7

4. Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ uma transformação linear dada por

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ z - w & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine a matriz de T com relação à base canônica.

3. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $G : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[T]_{\mathbb{B},\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_{\mathbb{C},\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

onde $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ são as bases $\mathscr{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\mathscr{C} = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$.

(a) Determine bases para $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

(b) Determine bases para $\ker(G \circ T)$ e $\operatorname{Im}(G \circ T)$.

(c) Determine a matriz de $H = 3(T \circ G) + \mathbb{I}_{\mathscr{P}_2(\mathbb{R})}$ com relação à base $\{1, x, x^2\}$ de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

OBS: $\mathbb{I}_{\mathscr{P}_2(\mathbb{R})}$ é a transformação identidade em $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{I}_{\mathscr{P}_2(\mathbb{R})}(p) = p$.

6.1.10

2. Mostre que a função $\langle\, , \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle (a, b, c, d)\, ,\, (x, y, z, w) \rangle = 2ax + by + cz + dw$$

é um produto interno de $\mathbb{R}^4$.

3. Use a desigualdade de Schwartz em $\mathbb{R}^3$ para provar que dados valores reais positivos $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, vale

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

6.2.10

2. Seja $S = [(1+i, 3i, 2-i), (2-3i, 10+2i, 5-1)] \subset \mathbb{C}^3$. Determine uma base ortogonal para S, considerando em $\mathbb{C}^3$ o produto interno canônico.

4. Considere o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $V = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{C})$ com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}$$

dt para $f, g \in V$. Prove que

(a) $| \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}| \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(t)|^2\right)^{1/2}$.

(b) Sejam $f_n(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi n x)$ e $g_n(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi n x)$. Prove que $S = \{1, f_2, g_1, f_2, g_2, \dots\}$ é um conjunto ortonormal em V.

(c) Prove que $S = \{h_n\}$ onde $h_n = e^{2\pi i n x}$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é um conjunto ortonormal em V.

Exercícios do Poole "Álgebra Linear"

Exemplo 4.25 Mostre que não é possível diagonalizar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.26 Encontre a matriz P que diagonaliza a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios da Seção 11.3 do Bartle "Introduction to Real Analysis"

OBS: Atenção! Dizer que um conjunto "não é aberto" é diferente de dizer que um conjunto é "fechado". Fechado significa que o complementar do conjunto é aberto. Por exemplo, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^C = \emptyset$ são simultaneamente abertos e fechados.

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido em $f(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que a imagem inversa $f^{-1}(I)$ de um intervalo aberto $I = (a, b)$ é um intervalo aberto, ou uma união de dois intervalos abertos, ou vazia, dependendo de a e b.

(b) Mostre que se I é um intervalo aberto contendo O, então a imagem direta $f(I)$ não é aberta.

5. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continuo, então o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\}$ é aberto em $\mathbb{R}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continuo, então o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$ é fechado em $\mathbb{R}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

8. Dê um exemplo de função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$ não é nem aberto e nem fechado em $\mathbb{R}$.