Q1: ___________

Q2: ___________

Q3: ___________

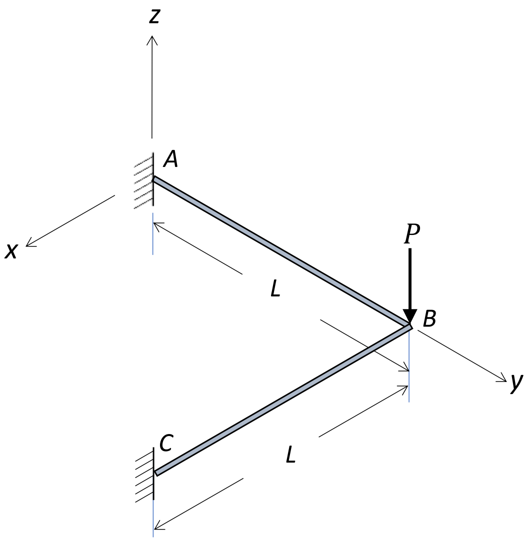
Nota: _________

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – 3ª Prova – 13/11/2023
Duração: 100 minutos

Nome: ______________________________________ N.USP: _________ Turma:___ Assinatura: __________________

1ª Questão (3,0 pontos)



A estrutura ABC da figura está contida em um plano horizontal. Ela é formada por uma barra dobrada em ângulo de 90º, de comprimento $2L$, engastada em A e em C. Essa barra tem rigidez flexional EI e rigidez à torção GI_P. Pede-se calcular o deslocamento vertical sofrido pelo ponto B quando a ele é aplicada uma força vertical P.

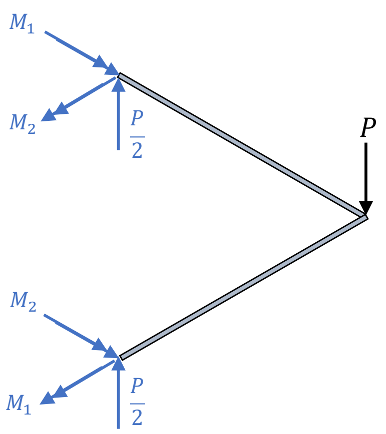
Notas:

1) Despreze a contribuição das forças cortantes à energia complementar.
2) Adotar $GI_P = \frac{4}{5}EI$

Resolução:

A estrutura é simétrica e o carregamento também é simétrico. Usando as propriedades de simetria:

DCL



Equilíbrio:

$$\Sigma M_{Ax} = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 = \frac{PL}{2}$$

$$\Sigma M_{Ay} = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 = \frac{PL}{2}$$

Então a estrutura é hiperestática, com grau de hiperestaticidade $g = 1$.

Vamos escolher M_1 como incógnita hiperestática.

Assim, pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

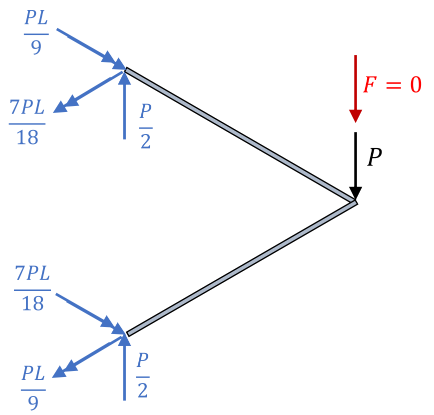
$$\frac{\partial U^*}{\partial M_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI}\int_0^L M_{CB}(x)\frac{\partial M_{CB}}{\partial M_1}dx + \frac{1}{GI_P}\int_0^L T_{CB}(x)\frac{\partial T_{CB}}{\partial M_1}dx = 0$$

$$M_{CB}(x) = \frac{P}{2}x - M_2 = \frac{P}{2}x + M_1 - \frac{PL}{2} \Rightarrow \frac{\partial M_{CB}}{\partial M_1} = 1$$

$$T_{CB}(x) = M_1 \Rightarrow \frac{\partial T_{CB}}{\partial M_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{P}{2}x + M_1 - \frac{PL}{2}\right)dx + \frac{5}{4EI}\int_0^L M_1 dx = 0 \Rightarrow M_1 = \frac{PL}{9} \Rightarrow M_2 = \frac{7PL}{18}$$

Assim, teremos o *DCL* final:



(1,5 pto)

onde inserimos uma força fictícia $F = 0$ para permitir o cálculo do deslocamento vertical:

$$\delta = \left(\frac{\partial U^*}{\partial F}\right)_{F=0}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{EI}\left(\int_0^L M_{CB}\frac{\partial M_{CB}}{\partial F}dx + \int_0^L M_{BA}\frac{\partial M_{BA}}{\partial F}dx\right)_{F=0} + \frac{1}{GI_P}\left(\int_0^L T_{CB}\frac{\partial T_{CB}}{\partial F}dx + \int_0^L T_{BA}\frac{\partial T_{BA}}{\partial F}dx\right)_{F=0}$$

Mas:

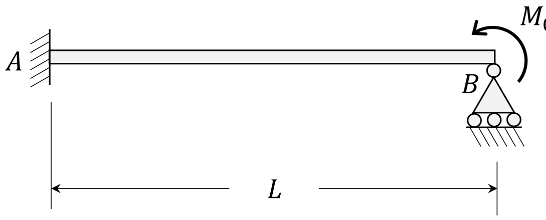
$$\frac{\partial M_{CB}}{\partial F} = 0 \qquad \frac{\partial T_{CB}}{\partial F} = 0 \qquad \frac{\partial T_{BA}}{\partial F} = 0$$

$$M_{BA} = \frac{PL}{9} - \frac{P}{2}x - Fx \Rightarrow \frac{\partial M_{BA}}{\partial F} = -x$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{PL}{9} + \frac{P}{2}x\right)x dx \Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{9EI}$$

(1,5 pto)

2ª Questão (4,0 pontos)



A barra AB da figura, de comprimento L, está engastada em A e simplesmente apoiada em B. A barra é prismática e tem rigidez flexional EI. À extremidade B é aplicado um binário M_0 conforme indicado. Pedem-se:

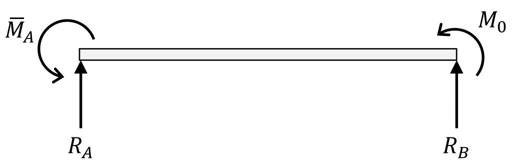
a) as reações vinculares;

b) a rotação do eixo central da barra junto ao ponto B.

Nota: Despreze a energia complementar devida às forças cortantes.

Resolução:

a)

DCL	*Equilíbrio:*
	$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 0$ $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow \bar{M}_A + M_0 - R_A L = 0$

A estrutura é hiperestática, com grau de hiperestaticidade $g = 1$.

Escolhendo R_B como incógnita hiperestática, pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial R_B} = 0 \Rightarrow \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial R_B} dx = 0$$

$$M(x) = R_B x + M_0$$

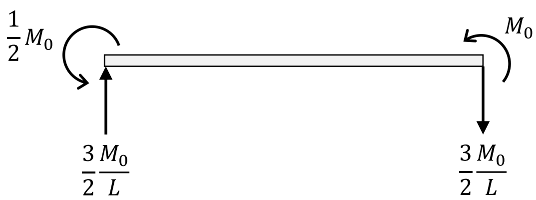
$$\frac{\partial M}{\partial R_B} = x$$

$$\Rightarrow R_B = -\frac{3}{2}\frac{M_0}{L}$$

As outras reações vêm das equações de equilíbrio:

$$R_A = \frac{3}{2}\frac{M_0}{L} \qquad \bar{M}_A = \frac{1}{2} M_0$$

Colocando os valores e os sentidos corretos no *DCL*:



(2,0 ptos)

b) A rotação do ponto B pode ser obtida pelo Teorema de Crotti-Engesser:

$$\theta = \frac{\partial U^*}{\partial M_0} = \frac{1}{EI}\int_0^L M(x)\frac{\partial M}{\partial M_0}dx = \frac{1}{EI}\int_0^L (R_B x + M_0)(1)dx = \frac{R_B L^2}{2EI} + \frac{M_0 L}{EI}$$

Do item anterior:

$$R_B = -\frac{3}{2}\frac{M_0}{L}$$

Logo:

$$\Rightarrow \theta = -\frac{3}{4}\frac{M_0 L}{EI} + \frac{M_0 L}{EI} \Rightarrow \theta = \frac{M_0 L}{4EI}$$

(2,0 ptos)

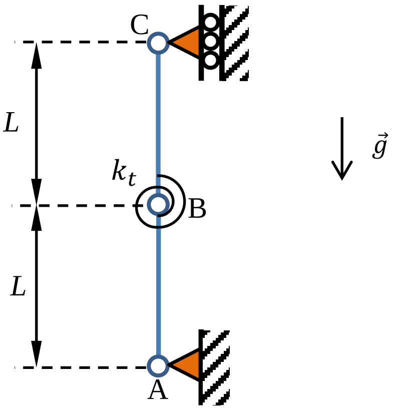
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos)

O sistema indicado na figura consiste de duas barras rígidas (indeformáveis), de mesmo comprimento L, simplesmente apoiadas nas extremidades A e C e articuladas no nó central B. Para evitar o movimento como mecanismo, uma mola de torção linear e de constante k_t liga o ponto superior da barra AB ao ponto inferior da barra BC. Considere que na configuração de referência os eixos centrais das duas barras estejam alinhados e que a mola de torção também esteja descarregada. São dados:

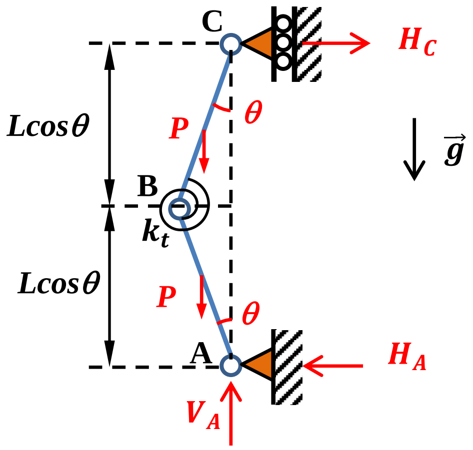
- γ = peso específico do material das barras;
- A = área da seção transversal das barras;
- k_t = rigidez torcional da mola de torção.

Determine, em função dos dados acima, qual é o comprimento crítico (L_{cr}) das barras AB e BC acima do qual a configuração de referência indicada na figura deixa de ser estável.



Resolução:

O diagrama de corpo livre da estrutura na configuração deformada fica dado por (note que os pesos próprios das barras AB e BC estão concentrados nos respectivos centros de massa):



(0,5 pto)

Impondo o equilíbrio de forças e de momentos, encontramos:

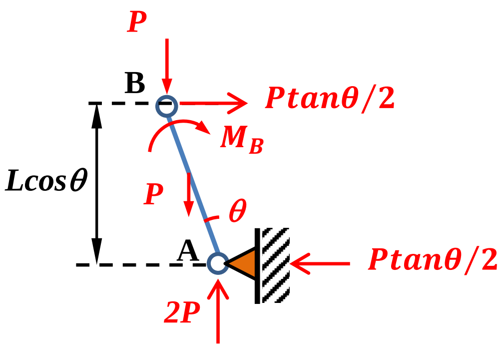
(1,0 pto)

$$V_A = 2P = 2\gamma AL$$

$$H_C(2L\cos\theta) = 2P\left(\frac{L}{2}sen\theta\right) \quad \Leftrightarrow \quad H_C = \frac{P\tan\theta}{2}$$

$$H_A = H_C \quad \Leftrightarrow \quad H_A = \frac{P\tan\theta}{2}$$

Transportando os esforços que agem sobre o trecho BC para o ponto B e impondo o equilíbrio de momentos sobre o trecho AB, obtemos:



(0,5 pto)

$$\frac{P}{2}tan\theta(Lcos\theta) + M_B = PLsen\theta + P\frac{L}{2}sen\theta$$

$$\frac{PL}{2}sen\theta + k_t(2\theta) = \frac{3}{2}PLsen\theta$$

Linearizando a equação de equilíbrio em torno de $\theta = 0$ (configuração de referência): (0,5 pto)

$$\frac{PL}{2}\theta + k_t(2\theta) - \frac{3}{2}PL\theta = 0$$

$$2k_t\theta - PL\theta = 0$$

$$(2k_t - PL)\theta = 0$$

A solução trivial $(\theta = 0)$ não tem interesse. Logo, a solução não trivial impõe que:

$$2k_t - PL = 0$$

$$P_{cr} = \frac{2k_t}{L_{cr}} = \gamma A L_{cr}$$

Ou seja: (0,5 pto)

$$L_{cr} = \sqrt{\frac{2k_t}{\gamma A}}$$

Obs: Note que a resposta acima está dimensionalmente correta:

$$[L_{cr}] = \sqrt{\frac{[k_t]}{[\gamma][A]}} = \sqrt{\frac{Nm}{\frac{N}{m^3}m^2}} = m$$

... qualquer resposta dada que esteja <u>dimensionalmente incorreta</u> levará à perda de 1,5 ponto!