

MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II (FEA-noturno)

GAB P3 (10.0 pt) - 13/12/2023

Gabarito provisório (i.e., **ainda sem** pontuação e indicação as referências da Lista 2 e Guia 4,5) liberado no 14.12.23 para que aluno(a)s que vão fazer a SUB possam já ir estudando.

Questão 1. Seja $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 1) \exp(x_1 - \frac{1}{10})$

- (a) Determine os pontos críticos de f .
- (b) Classifique os pontos críticos de f (em sela, máximos e ou mínimos locais).

Respostas:

- (a) *Os pontos críticos são: $q = (0, 0), p = (-1, 0)$.*

De fato, derivando temos:

$$\begin{aligned} 0 = f_{x_1} &= (2x_1 - 1)e^{x_1 - \frac{1}{10}} + (x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 1)e^{x_1 - \frac{1}{10}} \\ 0 = f_{x_2} &= 2x_2e^{x_1 - \frac{1}{10}} \end{aligned}$$

A segunda equação implica $x_2 = 0$ e substituindo na primeira concluímos que x_1 pode ser ou -1 ou 0 . Assim concluímos que os pontos críticos são: $q = (0, 0), p = (-1, 0)$

- (b) *$q = (0, 0)$ é mínimo local e $p = (-1, 0)$ é ponto de sela.*

De fato, derivando novamente:

$$\begin{aligned} f_{x_1, x_1} &= e^{x_1 - \frac{1}{10}} (x_1^2 + 3x_1 + x_2^2 + 1) \\ f_{x_1, x_2} &= 2x_2e^{x_1 - \frac{1}{10}} \\ f_{x_2, x_2} &= 2e^{x_1 - \frac{1}{10}} \end{aligned}$$

Lembre que

$$\text{Hess } f = \begin{bmatrix} f_{x_1, x_1} & f_{x_1, x_2} \\ f_{x_2, x_1} & f_{x_2, x_2} \end{bmatrix}$$

Substituindo $q = (0, 0)$ temos:

$$\begin{aligned}f_{x_1, x_1}(q) &= e^{-\frac{1}{10}} \\f_{x_1, x_2}(q) &= 0 \\f_{x_2, x_2}(q) &= 2e^{-\frac{1}{10}}\end{aligned}$$

Visto que $\det \text{Hess } f(q) > 0$ e $f_{x_1, x_1}(q) > 0$ então $q = (0, 0)$ é mínimo local.

Substituindo $p = (-1, 0)$ temos:

$$\begin{aligned}f_{x_1, x_1}(p) &= (-1)e^{-\frac{11}{10}} \\f_{x_1, x_2}(p) &= 0 \\f_{x_2, x_2}(p) &= 2e^{-\frac{11}{10}}\end{aligned}$$

visto que $\det \text{Hess } f(p) < 0$ então $p = (-1, 0)$ é ponto de sela.

Questão 2 (3,0). Dado $K = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 9\}$ considere a função $f : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x_1, x_2) = -(x_1)^2 + x_1 - (x_2)^2 + x_2 + 1$.

- (a) Determine o(s) ponto(s) crítico(s) no interior de K .
- (b) Determine no bordo de K os candidatos a máximos e mínimos de f restrito a bordo, i.e., os pontos $q^k \in \partial K$ que satisfazem $f(q^i) = \max_{x \in \partial K} f(x)$ e $f(q^j) = \min_{x \in \partial K} f(x)$.
- (c) Determine o valor de máximo global e o valor de mínimo global de f em K e os pontos onde estes valores ocorrem.

Respostas:

- (a) $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é o ponto crítico no interior

De fato esta é a solução do sistema $\nabla f(x) = (f_{x_1}, f_{x_2}) = (0, 0)$ para $\|x\| < 3$.

- (b) para $\|x\| = 3$ temos que os candidatos são:

$$(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}), (-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$$

De fato defina $g(x) = x_1^2 + x_2^2$. Os candidatos acima para máximo e mínimo no bordo $\partial K = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 9\}$ são soluções do problema de multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) \\ 9 &= g(x)\end{aligned}$$

- (c) • $f(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}) = -8 - 3\sqrt{2}$ é valor mínimo absoluto, ocorrendo no ponto $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$
- $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ é valor máximo absoluto, ocorrendo no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

De fato para obter esta resposta compare os valores obtidos no item (a) e item (b) ou seja:

$$\begin{aligned}f(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}) &= -9 + 3\sqrt{2} + 1 \\ f(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}) &= -9 - 3\sqrt{2} + 1 \\ f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} + 1\end{aligned}$$

Questão 3. Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1\}$

- (a) Diga se S é superfície de revolução (sim ou não); invariante por translação (sim ou não) e ou gráfico (sim ou não) e esboce S .
- (b) Determine a equação do plano tangente a S no ponto $q = (1, 1, \frac{3\sqrt{2}}{2})$
- (c) Determine o volume do maior paralelogramo de faces paralelas aos planos coordenados que pode estar contido na região delimitada por S . Em outras palavras definindo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = 8x_1x_2x_3$ e $S_+ = S \cap \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ obtenha $\max_{x \in S_+} f(x)$.

Respostas:

- (a) • Superfície de revolução: sim,
- gráfico: não,

- *superfície invariante por translação: não.*

Utilizando o fato da superfície ser de revolução podemos então esboçá-la, obtendo um elipsoide de revolução, vide Figura 1.

De fato é superfície de revolução (em relação ao eixo x_3) pois a equação que descreve S é $\frac{r^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1$ onde $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Não é gráfico (em relação a x_i) pois S não pode ser descrita pela equação $x_i = h(x_j, x_k)$ i.e, não podemos isolar uma variável em termos das outras duas. Não é invariante por translação pois a equação que descreve S tem todas as variáveis.

$$(b) \quad \frac{1}{2}(x_1 - 1) + \frac{1}{2}(x_2 - 1) + \frac{\sqrt{2}}{3}(x_3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}) = 0$$

De fato, definindo $g(x) = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9}$ a equação do plano segue da fórmula:

$$g_{x_1}(q)(x_1 - q_1) + g_{x_2}(q)(x_2 - q_2) + g_{x_3}(q)(x_3 - q_3) = 0.$$

$$(c) \quad O \text{ volume é } \frac{32}{\sqrt{3}} = f(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$$

De fato, observamos que o ponto de máximo não pode acontecer na curva ∂S_+ ou seja não pode estar em S e ter uma das coordenadas $x_i = 0$. Assim, tal ponto de máximo deverá ocorrer no interior da superfície S_+ e ser solução do sistema:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) \\ 1 &= g(x) \end{aligned}$$

o qual tem como solução $x = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$.

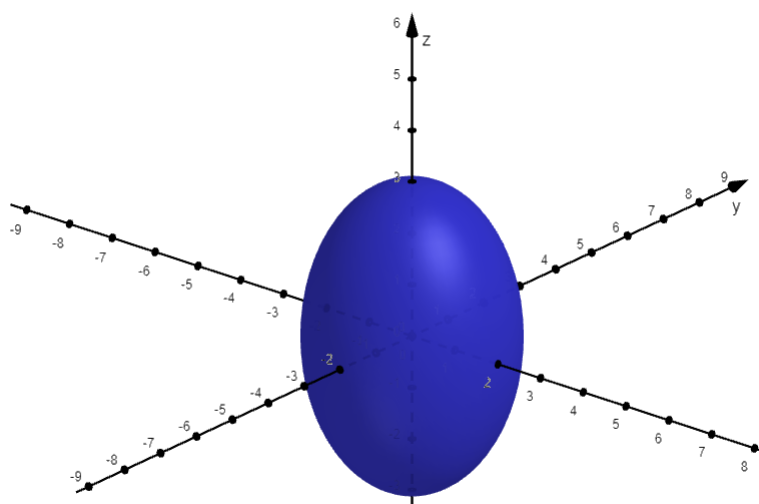


Figura 1: Questão 3