Abertos, fechados e compactos

Distância

Definição — **Distância**: Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto, $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma *distância* (métrica) em M se satisfaz

$$d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in M \tag{1}$$
$$d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in M \tag{2}$$
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in M \tag{3}$$
$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{4}$$

Dizemos que (M,d) é um espaço métrico.

Exemplo: A distância usual $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ para vetores $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ pertencentes a um espaço vetorial $M = V = \mathbb{R}^2$.

Bolas e outros conjuntos abertos e fechados

Definições — **Bolas:** $M \neq \emptyset$ com uma distância d. Seja r um raio e $\bar{x} \in M$ um centro,

- **bola aberta** é o conjunto $B_r(\bar{x}) = \{x \in M | d(x,\bar{x}) < r\}$;
- **bola fechada** é o conjunto $B_r[\bar{x}] = \{x \in M | d(x,\bar{x}) \leq r\}$.

Definição — **Limitado**: (M,d) espaço métrico. $A \subset M$ é limitado se existe $r > 0$ e um ponto $\bar{x} \in M$ tais que $B_r(\bar{x}) \supset A$, isto é, a bola aberta de raio r está contida em A.

Definição — **Pontos**: $M \neq \emptyset$ com uma distância d, $A \subset M$.

(i) $\bar{x} \in M$ é um ponto interior de A se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset A$.

(ii) $\bar{x} \in M$ é ponto exterior de A se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset A^C$, i.e. $\bar{x}$ é ponto interior de A^C.

(iii) $\bar{x} \in M$ é ponto de fronteira de A se para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap A^C \neq \emptyset$. Ou seja, é um ponto de fronteira se não for ponto interior nem ponto exterior.

Notações:

$int\ A$ = $\mathring{A}$ = conjunto dos pontos interiores de A

$Fr(A)$ = conjunto dos pontos de fronteira de A

$Ext(A) = \mathring{A}^C$ = conjunto dos pontos exteriores de A

#f**ato**:

(M, d) é espaço métrico, se $A \subset M \Rightarrow M = \mathring{A} \cup Fr(A) \cup Ext(A)$.

Exemplos: $M = \mathbb{R}^2$ com a distância usual d_2. $\mathring{A}$ é o conjunto do que está "dentro", $Fr(A)$ é o conjunto da "borda" e $Ext(A)$ é o conjunto do que está "fora" usualmente.

Definição — **Abertos e Fechados**: (M, d) espaço métrico, $X \subset M$,

(i) Xé dito aberto (em M) se $\forall \bar{x} \in X$, $\exists \varepsilon = \varepsilon(\bar{x}) > 0$ tal que $B_\varepsilon(\bar{x}) \subset X$, ie. $X \subset \mathring{X}$.

(ii) X é dito fechado (em M) se X^Cé aberto.

(iii) X é não aberto se $\exists \bar{x} \in X$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ temos $B_\varepsilon(\bar{x}) \cap X^C \not= \emptyset$.

Notem que um conjunto **pode ser** simultaneamente aberto E fechado. Por exemplo, se $X = M = \mathbb{R}^n$, então:

(i) $\mathbb{R}^n$ é aberto;

(ii) $(\mathbb{R}^n)^C = \emptyset$ é aberto, pois para todos os pontos (no caso, nenhum ponto) pode-se construir uma bola aberta contida no conjunto;

(iii) Como $(\mathbb{R}^n)^C = \emptyset$ é aberto, então $\mathbb{R}^n$ é fechado;

(iv) Como $\mathbb{R}^n$ é aberto, então $\emptyset$ é fechado.

Ou seja, $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ são ambos simultaneamente abertos e fechados.

#fatos:

$\mathring{A} \subset A$

$\mathring{A}$ é aberto

$\mathring{A}$ é o maior aberto contido em A

A é aberto $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

Afirmação: $\mathring{A}$ é o maior aberto contido em A. Note que $\mathring{A} \subset \cup_{\bar{x} \in \mathring{A}} B_{\varepsilon_{\bar{x}}} \subset A$, em que a união de abertos $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ também é aberta.

Compactos

Definição — **Cobertura**: Uma cobertura de um conjunto $X \subset M$ é uma família (finita ou infinita) de subconjuntos $\mathcal{O}_\lambda \subset X$ cuja união é o próprio conjunto X,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda = X,$$

em que Λ é um conjunto de índices λ que serve como "identificação" para os subconjuntos. Com essa definição, cada ponto $x \in X$ vai pertencer a pelo menos um dos subconjuntos $\mathcal{O}_\lambda$.

Se a família de subconjuntos for enumerável, então $\Lambda = \mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, uma cobertura para $\mathbb{R}$ é formada pelos subconjuntos

$$\mathcal{O}_n = (-n, n), \quad n \in \mathbb{N}$$

pois a união $\cup_{n \in \mathbb{N}} O_n = \mathbb{R}$.

Estaremos mais interessados em uma cobertura de X por subconjuntos $\mathcal{O}_\lambda$ que sejam conjuntos **abertos**. Com isso, é possível estabelecer as seguintes definições:

Definição — **Subcobertura**: em linguagem muito simples, dada uma cobertura de X por $X\mathcal{F} = \{\mathcal{O}_\alpha, \mathcal{O}_\beta, \dots\}$, posso ignorar alguns de seus conjuntos abertos ou trocá-los por subconjuntos menores $\mathcal{O}'_\gamma \subset \mathcal{O}_\gamma$, tal que esse novo conjunto $\mathcal{F}'$ de abertos vai ser também uma cobertura de X. Ou seja, eu fiz um *refinamento* da minha cobertura original para excluir aquilo que não era estritamente necessário para cobrir X, mas essa família refinada também é uma cobertura.

Definição — **Compacto**: Um conjunto $X \subset M$ é dito compacto se *para cada* cobertura de X por abertos, existe uma **subcobertura** finita de X,

$$S = \{\mathcal{O}_{\lambda_1}, \mathcal{O}_{\lambda_2}, \dots, \mathcal{O}_{\lambda_n}\}$$

#fatos:

$K_1, K_2 \subset M$ compactos, então $K_1 \cup K_2$ é compacto.

$K_1, K_2 \subset M$ compactos. Então se $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, $K_1 \cap K_2$ é compacto.

$K \subset M$ compacto. Então K é fechado e limitado.

Note que não vale a recíproca. Um conjunto fechado e limitado **não** necessariamente é compacto.

- $M = \mathbb{C}([-\pi, \pi])$ e d_2. $B_r[0]$ não é compacta. Na verdade, $F = \{\cos nt \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B_{r_0}[0]$ tal que F é fechado e não é compacto, então a bola não é compacta, pois se fosse $F \cap B_r = F$ seria compacto pela afirmação 2.

Heine-Borel

<u>Teorema</u>. Seja $M = \mathbb{R}^n$ com a distância usual, então K é compacto $\Leftrightarrow$ K é fechado e limitado.

Funções contínuas

Teorema (Caracterização Global de Continuidade). Sejam dois conjuntos M, N e seja $f : A \subset M \to N$ para $A \neq \emptyset$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) f é contínua;

ii) $\forall U \subset N$ aberto existe $O \subset M$ aberto tal que $f^{-1}(U) = O \cap A$.

A notação $f^{-1}(U)$ significa a "pré-imagem": o conjunto de pontos $x \in O \cap A$ tais que $f(x) \in U$.

Teorema (Preservação de compacidade).Sejam dois conjuntos M, N e seja $f : A \subset M \to N$. Então para todo conjunto $K \subset A$ compacto de M, tem-se que $f(K) \subset N$ é compacto de N.