

Lembre-se de que a condução se refere ao transporte de energia em um meio devido a um gradiente de temperatura e o mecanismo físico é a atividade atômica ou molecular aleatória. No Capítulo 1, aprendemos que a transferência de calor por condução é governada pela *lei de Fourier* e que o uso desta lei para determinar o fluxo térmico depende do conhecimento da forma na qual a temperatura varia no meio (a *distribuição de temperaturas*). Inicialmente, restringimos nossa atenção a condições simplificadas (condução unidimensional e em regime estacionário em uma parede plana) nas quais a distribuição de temperaturas é facilmente deduzida, sendo linear. Contudo, a lei de Fourier pode ser aplicada à condução transiente e multidimensional em geometrias complexas, nas quais a natureza da distribuição de temperaturas não é evidente.

Os objetivos deste capítulo são dois. Primeiramente, desejamos desenvolver um entendimento mais profundo da lei de Fourier. Quais são suas origens? Que forma ela tem em diferentes geometrias? Como sua constante de proporcionalidade (a *condutividade térmica*) depende da natureza física do meio? Nosso segundo objetivo é desenvolver, a partir de princípios básicos, a equação geral, chamada de *equação do calor*, que governa a distribuição de temperaturas em um meio. É a solução dessa equação que fornece o conhecimento da distribuição de temperaturas, que pode ser, então, usada com a lei de Fourier para determinar o fluxo térmico.

2.1

A Equação da Taxa da Condução

Embora a equação da taxa da condução, lei de Fourier, tenha sido apresentada na Seção 1.2, este é o momento apropriado para analisarmos a sua origem. A lei de Fourier é *fenomenológica*, isto é, ela foi desenvolvida a partir de fenômenos observados ao invés de ter sido derivada a partir de princípios fundamentais. Por esse motivo, vemos a equação da taxa como uma generalização baseada em uma vasta evidência experimental. Por exemplo, considere o experimento de condução de calor, em regime estacionário, mostrado na Figura 2.1. Um bastão cilíndrico de material conhecido tem a sua superfície lateral isolada termicamente, enquanto as duas faces restantes são mantidas a diferentes temperaturas, com $T_1 > T_2$. A diferença de temperaturas causa transferência de calor por condução no sentido positivo do eixo x . Somos capazes de medir a taxa de transferência de calor q_x e buscamos determinar como q_x depende das seguintes variáveis: ΔT , a diferença de temperaturas; Δx , o comprimento do bastão; e A , a área da seção transversal do bastão.

Podemos imaginar que, inicialmente, os valores de ΔT e Δx sejam mantidos constantes, enquanto o valor de A varia. Ao fazermos isso, verificamos que q_x é diretamente proporcional a A . Analogamente, mantendo ΔT e A constantes, observamos que q_x varia inversamente com Δx . Finalmente, mantendo A e Δx constantes, temos que q_x é diretamente proporcional à ΔT . O efeito conjunto é, então,

$$q_x \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

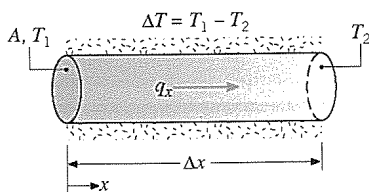


FIGURA 2.1 Experimento de condução térmica em regime estacionário.

Ao mudarmos o material (por exemplo, de um metal para um plástico), observaríamos que a proporcionalidade anterior permanece válida. Contudo, também constataríamos que, para valores idênticos de A , Δx , e ΔT , o valor de q_x seria menor para o plástico do que para o metal. Isso sugere que a proporcionalidade pode ser convertida em uma igualdade pela introdução de um coeficiente que é uma medida do comportamento do material. Assim, escrevemos

$$q_x = kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

onde k , a *condutividade térmica* ($\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$), é uma importante *propriedade* do material. Levando a expressão anterior ao limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, obtemos para a *taxa* de transferência de calor

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

ou para o *fluxo* de calor (fluxo térmico)

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (2.2)$$

Lembre-se de que o sinal de menos é necessário porque o calor é sempre transferido no sentido da diminuição das temperaturas.

A lei de Fourier, como escrita na Equação 2.2, implica que o fluxo térmico é uma grandeza direcional. Em particular, a direção de q_x'' é *normal* à área da seção transversal A . Ou, de uma forma mais geral, a direção do escoamento de calor será sempre normal a uma superfície de temperatura constante, chamada de superfície *isotérmica*. A Figura 2.2 ilustra o sentido do fluxo térmico q_x'' em uma parede plana na qual o *gradiente de temperatura* dT/dx é negativo. A partir da Equação 2.2, conclui-se que q_x'' é positivo. Note que as superfícies isotérmicas são planos normais à direção do eixo x .

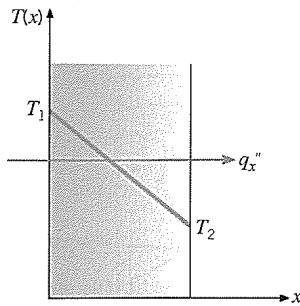


FIGURA 2.2 A relação entre o sistema de coordenadas, o sentido do escoamento de calor e o gradiente de temperatura em uma dimensão.

Reconhecendo que o fluxo térmico é uma grandeza vetorial, podemos escrever um enunciado mais geral para a equação da taxa da condução (*lei de Fourier*) da seguinte forma:

$$q'' = -k\nabla T = -k \left(i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.3)$$

onde ∇ é o operador “grad” tridimensional e $T(x, y, z)$ é o campo escalar de temperaturas. Está implícito na Equação 2.3 que o vetor fluxo térmico encontra-se em uma direção perpendicular às superfícies isotérmicas. Conseqüentemente, uma forma alternativa da lei de Fourier é

$$q''_n = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.4)$$

onde q''_n é o fluxo térmico em uma direção n , que é normal a uma *isoterma*, como mostrado para o caso bidimensional na Figura 2.3. A transferência de calor é mantida pelo gradiente de temperatura ao longo de n . Observe também que o vetor fluxo térmico pode ser decomposto em componentes, de tal forma que, em coordenadas cartesianas, a expressão geral para q'' é

$$q'' = i q''_x + j q''_y + k q''_z \quad (2.5)$$

2.2

As Propriedades Térmicas da Matéria

Para usar a lei de Fourier, a condutividade térmica do material deve ser conhecida. Essa propriedade, que é classificada como uma *propriedade de transporte*, fornece uma indicação da taxa na qual a energia é transferida pelo processo de difusão. Ela depende da estrutura física da matéria, atômica e molecular, que está relacionada ao estado da matéria. Nesta seção, analisaremos várias formas da matéria, identificando aspectos importantes dos seus comportamentos e apresentando valores típicos desta propriedade.

2.2.1 Condutividade Térmica

A partir da lei de Fourier, Equação 2.6, a condutividade térmica associada à condução na direção x é definida como

$$k_x \equiv - \frac{q''_x}{(\partial T / \partial x)}$$

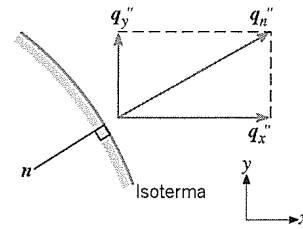


FIGURA 2.3 O vetor fluxo térmico normal a uma isoterma em um sistema de coordenadas bidimensional.

onde, a partir da equação 2.3, tem-se que

$$q''_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q''_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q''_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.6)$$

Cada uma dessas expressões relaciona o fluxo térmico *através de uma superfície* ao gradiente de temperatura em uma direção perpendicular à superfície. Também está implícito na Equação 2.3 que o meio através do qual a condução ocorre é *isotrópico*. Em tal meio, o valor da condutividade térmica é independente da direção da coordenada.

A lei de Fourier é a pedra fundamental da transferência de calor por condução e suas características principais são resumidas a seguir. Ela *não* é uma expressão que possa ser derivada a partir de princípios fundamentais; ao contrário, ela é uma generalização baseada em evidências experimentais. Ela é uma expressão que *define* uma importante propriedade dos materiais, a condutividade térmica. Além disso, a lei de Fourier é uma expressão vetorial, indicando que o fluxo térmico é normal a uma isoterma e no sentido da diminuição das temperaturas. Finalmente, note que a lei de Fourier se aplica a toda matéria, independentemente do seu estado físico (sólido, líquido ou gás).

Definições similares são associadas às condutividades térmicas nas direções y e z (k_y, k_z), porém para um material isotrópico a condutividade térmica é independente da direção de transferência, $k_x = k_y = k_z \equiv k$.

Da equação anterior tem-se que, para um dado gradiente de temperatura, o fluxo térmico por condução aumenta com o aumento da condutividade térmica. Em geral, a condutividade térmica de um sólido é maior do que a de um líquido, que, por sua vez, é maior do que a de um gás. Conforme ilustrado na Figura 2.4, a condutividade térmica de um sólido pode ser mais do que quatro ordens de grandeza superior à de um gás. Essa tendência se deve, em grande parte, à diferença no espaçamento intermolecular nos dois estados.

O Estado Sólido Na visão moderna dos materiais, um sólido pode ser composto por elétrons livres e átomos ligados em um arranjo periódico chamado de *lattice*. Conseqüentemente, o trans-

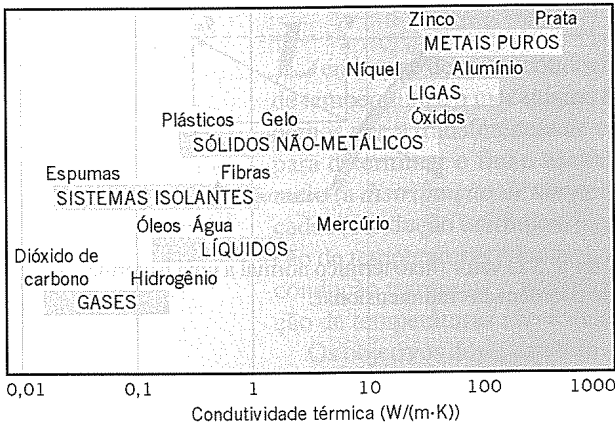


FIGURA 2.4 Faixas da condutividade térmica de vários estados da matéria a temperaturas e pressões normais.

porte de energia térmica pode ser devido a dois efeitos: migração de elétrons livres e ondas vibracionais no *lattice*. Quando visto como um fenômeno de partículas, os *quanta* da vibração do *lattice* são chamados de *fônons*. Em metais puros, a contribuição dos elétrons para a transferência de calor por condução predomina, enquanto em não-condutores e semicondutores a contribuição dos fônons é dominante.

A teoria cinética fornece a expressão a seguir para a condutividade térmica [1]:

$$k = \frac{1}{3} C \bar{c} \lambda_{ipm} \quad (2.7)$$

Para materiais condutores como os metais, $C \equiv C_e$ é o calor específico do elétron por unidade de volume, \bar{c} é a velocidade média do elétron e $\lambda_{ipm} \equiv \lambda_e$ é o livre percurso médio do elétron, que é definido como a distância média percorrida por um elétron antes de colidir com uma imperfeição no material ou com um fônon. Em sólidos não-condutores, $C \equiv C_f$ é o calor específico do fônon, \bar{c} é a velocidade média do som e $\lambda_{ipm} \equiv \lambda_f$ é o livre percurso médio do fônon, que novamente é determinado por colisões com imperfeições ou outros fônons. Em todos os casos, a condutividade térmica aumenta na medida em que o livre percurso médio dos *transportadores de energia* (elétrons ou fônons) é aumentado.

Quando elétrons e fônons transportam energia térmica levando à transferência de calor por condução em um sólido, a condutividade térmica k pode ser representada por

$$k = k_e + k_f \quad (2.8)$$

Em uma primeira aproximação, k_e é inversamente proporcional à resistividade elétrica, ρ_e . Para metais puros, que possuem um valor baixo de ρ_e , k_e é muito maior do que k_f . Ao contrário, para ligas, que possuem um valor de ρ_e substancialmente mais elevado, a contribuição de k_f para k passa a não ser mais desprezível. Para sólidos não-metálicos, k é determinada principalmente por k_f , que aumenta na medida em que a frequência das interações entre os átomos e o *lattice* diminuem. A regularidade do arranjo do *lattice* tem um efeito importante em k_f , com materiais cristalinos (bem-ordenados), como o quartzo, possuindo uma condutividade térmica maior do que materiais amorfos, como o vidro.

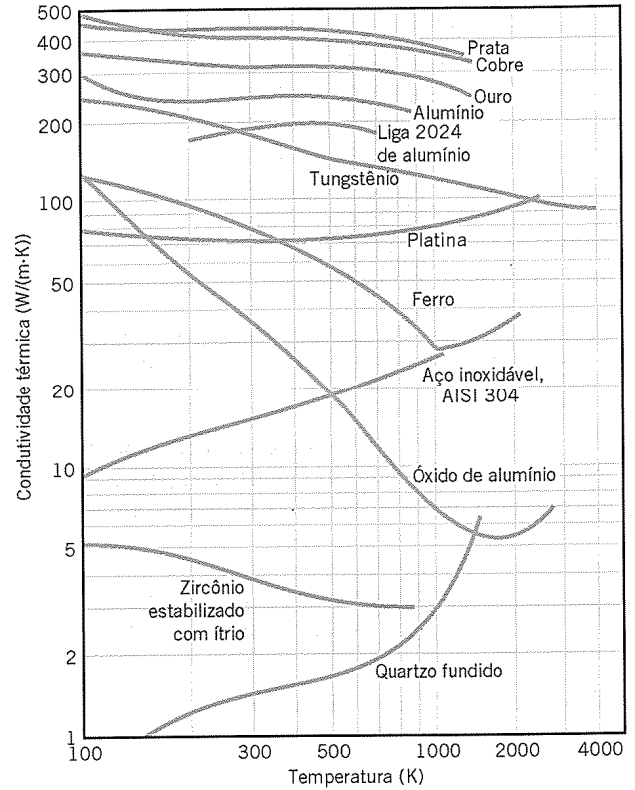


FIGURA 2.5 A dependência com a temperatura da condutividade térmica de sólidos selecionados.

Na realidade, para sólidos cristalinos não-metálicos, tais como o diamante e o óxido de berílio, k_f podem ser bastante grandes, excedendo valores de k associados a bons condutores, como o alumínio.

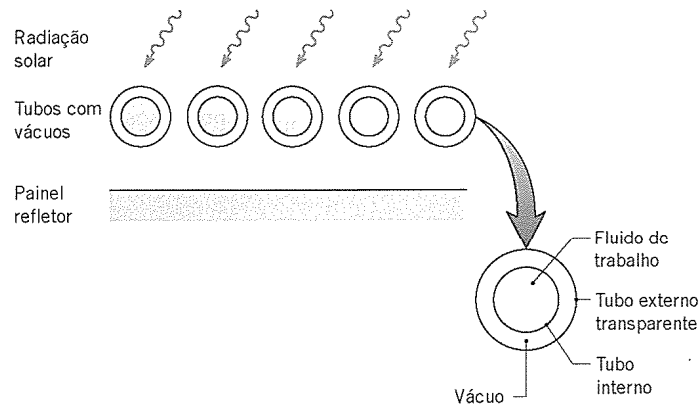
A dependência de k com a temperatura é mostrada na Figura 2.5 para sólidos metálicos e não-metálicos representativos. Valores de materiais selecionados, de importância técnica, também são fornecidos na Tabela A.1 (sólidos metálicos) e nas Tabelas A.2 e A.3 (sólidos não-metálicos). Análises mais detalhadas da condutividade térmica estão disponíveis na literatura [2].

O Estado Sólido: Efeitos em Escalas Micro e Nano Na discussão anterior, a condutividade térmica *global* é descrita e os respectivos valores, listados nas Tabelas A.1 a A.3, são apropriados para o uso quando as dimensões físicas do material de interesse são relativamente grandes. Este é o caso em muitos problemas tradicionais de engenharia. Entretanto, em algumas áreas da tecnologia, como a microeletrônica, as dimensões características dos materiais podem ser da ordem de micrômetros ou nanômetros. Nesses casos, deve-se tomar cuidado para levar em conta as possíveis modificações em k que podem ocorrer na medida em que as dimensões físicas ficam pequenas.

Seções transversais de *filmes* do mesmo material que possuem espessuras L_1 e L_2 são mostradas na Figura 2.6. Elétrons ou fônons que estão associados à condução de energia térmica são também mostrados qualitativamente. Note que as fronteiras físicas do filme agem no *espalhamento* dos transportadores de energia e no *redirecionamento* de sua propagação. Para grandes L/λ_{ipm} (Figura 2.6a), o efeito das fronteiras na redução do comprimento *médio* da trajetória do transportador de energia é me-

tubo externo que é transparente à radiação solar. Há vácuo na região anular entre os dois tubos. A superfície externa opaca do tubo interno absorve radiação solar e um fluido de trabalho é passado através deste tubo para coletar a energia

solar. O projeto geralmente prevê uma linha desses tubos posicionada em frente a um painel refletor. Identifique todos os processos de transferência de calor relevantes para a *performance* deste dispositivo.



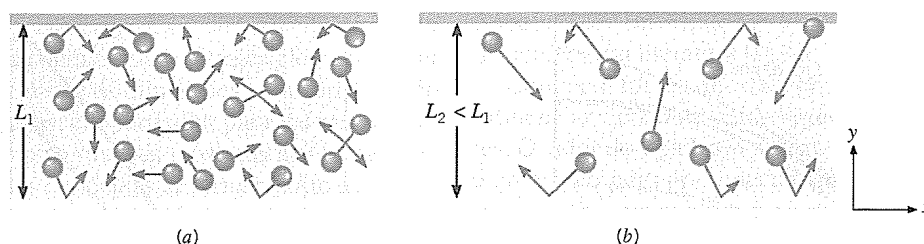


FIGURA 2.6 Trajetórias de elétrons e fônons com efeitos de fronteiras em (a) um filme relativamente espesso e (b) um filme relativamente fino.

nor e a transferência de calor por condução ocorre como descrito de forma global nos materiais. Contudo, na medida em que o filme se torna mais fino, as fronteiras físicas do material podem diminuir a distância média líquida percorrida pelos transportadores de energia, como mostrado na Figura 2.6b. Além disso, elétrons e fônons que se movimentam na diminuta direção y (representando a condução na direção y) são afetados pelas fronteiras de uma forma mais significativa do que os transportadores de energia que se movem na direção x . Desta forma, para filmes caracterizados por pequenos L/λ_{ipm} , temos que $k_y < k_x < k$, onde k é a condutividade térmica global do material do filme.

Para $L/\lambda_{\text{ipm}} \geq 1$, valores para k_x e k_y podem ser estimados com 20% de precisão a partir das seguintes expressões[1]:

$$k_x/k = 1 - 2\lambda_{\text{ipm}}/(3\pi L) \quad (2.9a)$$

$$k_y/k = 1 - \lambda_{\text{ipm}}/(3L) \quad (2.9b)$$

As Equações 2.9a,b revelam que os valores de k_x e k_y se afastam no máximo aproximadamente 5% da condutividade térmica global se $L/\lambda_{\text{ipm}} > 7$ (para k_y) e $L/\lambda_{\text{ipm}} > 4,5$ (para k_x). Valores do livre percurso médio, assim como da espessura de filme crítica, L_{crit} , abaixo da qual os efeitos de microescala têm que ser considerados, são incluídos na Tabela 2.1 para alguns materiais a $T \approx 300$ K. Para filmes com $\lambda_{\text{ipm}} < L < L_{\text{crit}}$, k_x e k_y são determinados a partir dos valores globais como indicado nas Equações 2.9a, b. Não há regras gerais para prever valores das condutividades térmicas para $L/\lambda_{\text{ipm}} < 1$. Note que, em sólidos, os valores de λ_{ipm} diminuem na medida em que a temperatura aumenta.

Em adição ao espalhamento a partir das fronteiras físicas, como no caso da Figura 2.6b, os transportadores de energia podem ser redirecionados por *dopantes* químicos impregnados no material ou pelas *fronteiras dos grãos*, que separam *clusters* individuais do material em outro modo de matéria homogênea. *Materiais nanoestruturados* são quimicamente idênticos aos seus correspondentes na forma convencional, porém são processados termicamente para fornecer tamanhos de grãos muito pequenos

no material final e, na perspectiva da transferência de calor, há um aumento significativo do espalhamento e da reflexão dos transportadores de energia nas fronteiras dos grãos.

Valores medidos da condutividade térmica de um material nanoestruturado de zircônio estabilizado com ítrio são mostrados na Figura 2.7. Esta cerâmica particular é largamente usada com objetivos de isolamento térmico em dispositivos de combustão a alta temperatura, como motores de turbina a gás. A condução é dominada pela transferência de fônons e o livre percurso médio dos transportadores de energia na forma de fônons é, a partir da Tabela 2.1, $\lambda_{\text{ipm}} = 25$ nm a 300 K. Na medida em que o tamanho dos grãos é reduzido para dimensões características menores do que 25 nm (e mais fronteiras de grãos são introduzidas no material por unidade de volume), ocorre uma significativa redução da condutividade térmica. A extrapolação dos resultados da Figura 2.7 para temperaturas maiores não é recomendada, pois o livre percurso médio diminui com o aumento da temperatura ($\lambda_{\text{ipm}} \approx 4$ nm para $T \approx 1525$ K) e grãos do material podem coalescer, se unir e aumentar a temperaturas elevadas. Conseqüentemente, L/λ_{ipm} se torna maior em altas temperaturas e a redução de k devido aos efeitos em nanoescala é menos pronunciada.

O Estado Fluido O estado fluido inclui tanto líquidos quanto gases. Como o espaçamento intermolecular é muito maior e o movimento das moléculas é mais aleatório para o estado fluido em relação ao estado sólido, o transporte de energia térmica é menos efetivo. Conseqüentemente, a condutividade térmica de gases e de líquidos é geralmente menor do que a de sólidos.

O efeito da temperatura, da pressão e das espécies químicas presentes na condutividade térmica de um gás pode ser explicado pela teoria cinética dos gases [5]. Desta teoria sabe-se que a condutividade térmica é diretamente proporcional à densidade do gás, à velocidade molecular média \bar{c} e ao livre percurso médio λ_{ipm} , que é a distância média percorrida por um

TABELA 2.1 Livre percurso médio e espessura de filme crítica para vários materiais a $T \approx 300$ K[3,4]

| Material | λ_{ipm} (nm) | $L_{\text{crit},y}$ (nm) | $L_{\text{crit},x}$ (nm) |
|---------------------------------|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Arsenito de gálio | 23 | 160 | 100 |
| Diamante(IIa) | 315 | 2200 | 1400 |
| Dióxido de silício | 0,6 | 4 | 3 |
| Ouro | 31 | 220 | 140 |
| Óxido de alumínio | 5,08 | 36 | 22 |
| Silício | 43 | 290 | 180 |
| Zircônio estabilizado com ítrio | 25 | 170 | 110 |

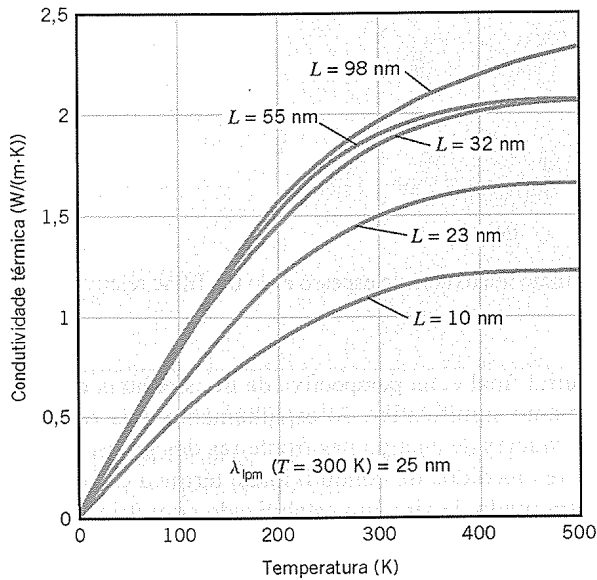


FIGURA 2.7 Condutividades térmicas medidas do zircônio estabilizado com ítrio como uma função da temperatura e do tamanho médio dos grãos [3].

transportador de energia (uma molécula) antes de experimentar uma colisão.

$$k = \frac{1}{3} c_v \rho \bar{c} \lambda_{lpm} \quad (2.10)$$

Uma vez que \bar{c} aumenta com o aumento da temperatura e com a diminuição da massa molecular, a condutividade térmica de um gás aumenta com a elevação da temperatura e com a diminuição da massa molecular. Essas tendências são mostradas na Figura 2.8. Contudo, como ρ e λ_{lpm} são direta e inversamente proporcionais à pressão do gás, respectivamente, a condutividade térmica é independente da pressão, à exceção de casos extremos como, por exemplo, quando as condições se aproximam daquelas do vácuo perfeito. Conseqüentemente, a hipótese de que k é independente da pressão do gás para grandes volumes de gás é apropriada para as faixas de pressão de interesse neste texto. Dessa forma, embora os valores de k apresentados na Tabela A.4 se refiram à pressão atmosférica ou à pressão de saturação correspondente à temperatura dada, eles podem ser usados em uma faixa ampla de pressões.

As condições moleculares associadas ao estado líquido são mais difíceis de serem descritas e os mecanismos físicos envolvidos na explicação da condutividade térmica não são bem entendidos[6]. A condutividade térmica de líquidos não-metálicos geralmente diminui com o aumento da temperatura. Como mostrado na Figura 2.9, água, glicerina e óleo de motor são notáveis exceções. A condutividade térmica de líquidos normalmente não varia com a pressão, exceto nas proximidades do ponto crítico. Também é geralmente verdade que a condutividade térmica diminui com o aumento da massa molecular. Valores da condutividade térmica são freqüentemente tabelados em função da temperatura para o estado saturado do líquido. As Tabelas A.5 e A.6 apresentam esses dados para vários líquidos de uso comum.

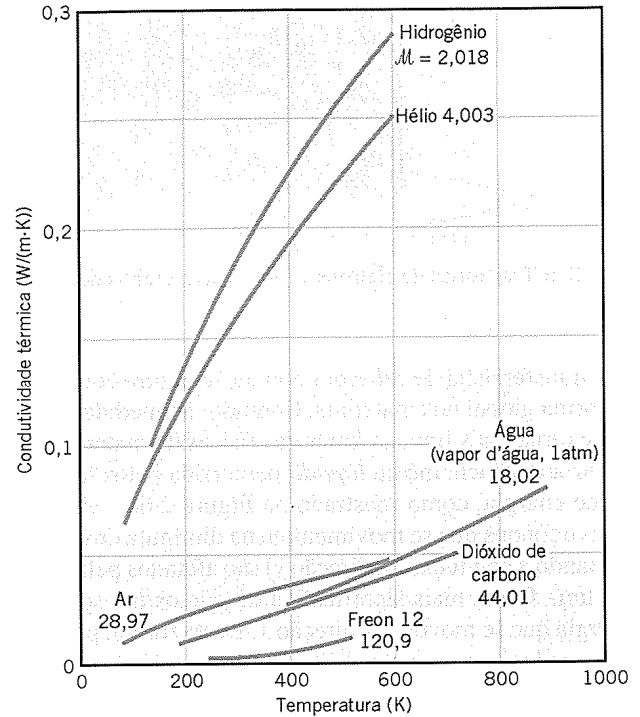


FIGURA 2.8 A dependência com a temperatura da condutividade térmica de gases selecionados a pressões normais. Massas moleculares (M) dos gases também são mostradas.

Metais líquidos são freqüentemente utilizados em aplicações com elevados fluxos térmicos, tais como as que existem em usinas nucleares de potência. A condutividade térmica desses líquidos é dada na Tabela A.7. Observe que os valores são muito maiores do que aqueles dos líquidos não-metálicos [7].

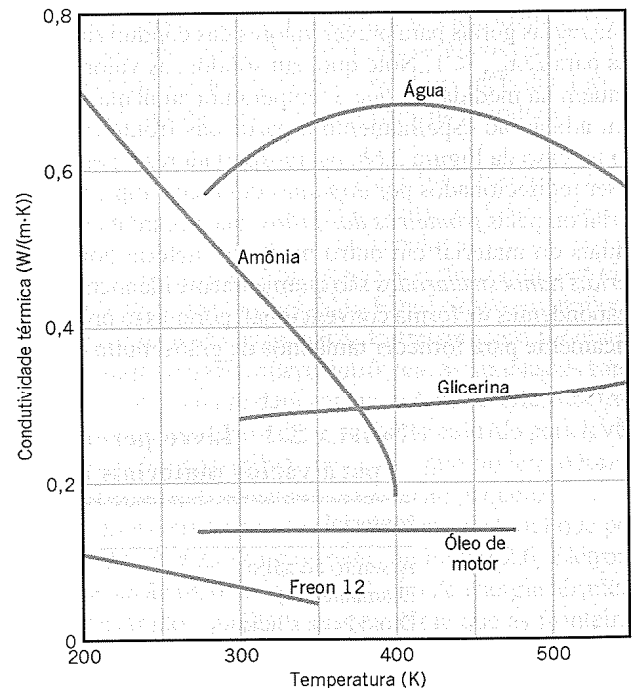


FIGURA 2.9 A dependência com a temperatura da condutividade térmica de líquidos não-metálicos selecionados sob condições saturadas.

O Estado Fluido: Efeitos em Escalas Micro e Nano

Como no estado sólido, a condutividade térmica global pode ser modificada na medida em que as dimensões características do sistema se tornam pequenas, em particular para valores pequenos de L/λ_{ipm} . Assim como na situação mostrada na Figura 2.6b, o livre percurso médio das moléculas se torna restrito quando o fluido é, por exemplo, contido em um reservatório de pequena dimensão física.

Sistemas de Isolamento Isolantes térmicos são constituídos por materiais de baixa condutividade térmica combinados para obter uma condutividade térmica do sistema ainda menor. Nos isolantes tradicionais do tipo *fibras*, *pós*, ou *flocos*, o material sólido encontra-se finamente disperso em um espaço contendo ar. Tais sistemas são caracterizados por uma *condutividade térmica efetiva*, que depende da condutividade térmica e das propriedades radiantes da superfície do material sólido, bem como da natureza e da fração volumétrica de ar ou espaços vazios. Um importante parâmetro do sistema é a sua densidade aparente (massa do sólido/volume total), que depende fortemente da forma na qual o material está empacotado.

Se pequenos espaços são formados pela ligação ou fundição de porções do material sólido, uma matriz rígida é criada. Quando não há ligação entre esses espaços, o sistema é conhecido como um isolante *celular*. Exemplos de tais isolantes rígidos são sistemas de *espumas*, particularmente aqueles feitos com materiais plásticos ou vítreos. Isolantes *refletivos* são compostos por múltiplas e paralelas camadas de folhas finas ou lâminas de alta refletividade, que são espaçadas entre si de modo a refletir a energia radiante de volta à sua origem. O espaçamento entre as folhas é projetado de modo a restringir o movimento do ar e, em isolantes de alta *performance*, há vácuo nesse espaço. Em todos os tipos de isolantes, vácuo nos espaços vazios implica na redução da condutividade térmica efetiva do sistema.

É importante reconhecer que a transferência de calor através de qualquer um desses sistemas de isolamento pode incluir vários modos: condução através dos materiais sólidos; condução ou convecção através do ar nos espaços vazios e troca radiante entre superfícies da matriz sólida. A condutividade térmica efetiva leva em consideração todos esses processos e valores para alguns sistemas de isolamento selecionados que estão resumidos na

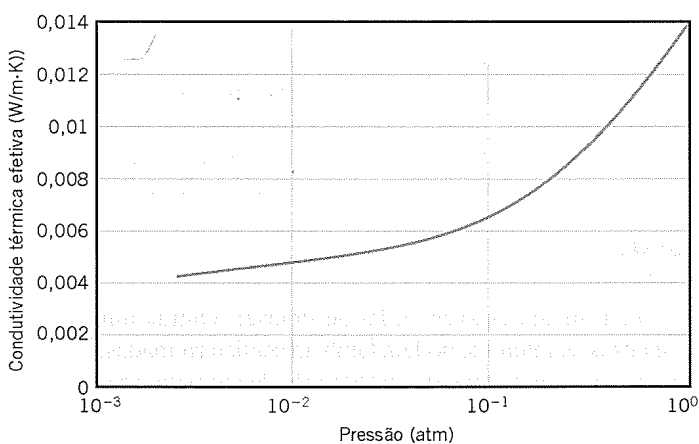


FIGURA 2.10 Condutividade térmica medida de aerogel de sílica dopado com carbono como uma função da pressão a $T \approx 300$ K [10].

Tabela A.3. Informações básicas adicionais e dados estão disponíveis na literatura [8, 9].

Como em filmes finos, efeitos de micro e nanoescala podem influenciar a condutividade térmica efetiva de materiais isolantes. O valor de k para um aerogel de sílica nanoestruturada, que é composto por aproximadamente 5% em volume de material sólido e 95% em volume de ar retido no interior de poros de $L \approx 20$ nm, é mostrado na Figura 2.10. Note que a $T \approx 300$ K, o livre percurso médio do ar na pressão atmosférica é aproximadamente 80 nm. Na medida em que a pressão é reduzida, o λ_{ipm} crescerá para um gás não-confinado, mas o movimento molecular do ar retido está restrito pelas paredes dos pequenos poros e k é reduzido a valores extremamente baixos em relação às condutividades térmicas de materiais convencionais mostrados na Figura 2.4.

2.2.2 Outras Propriedades Relevantes

Em nossa análise de problemas da transferência de calor, será necessário o uso de várias propriedades da matéria. Essas propriedades são geralmente conhecidas por propriedades *termofísicas* e incluem duas categorias distintas: as propriedades de *transporte* e as propriedades *termodinâmicas*. As propriedades de transporte incluem os coeficientes das taxas de difusão, como k , a condutividade térmica (para a transferência de calor), e ν , a viscosidade cinemática (para a transferência de momento). As propriedades termodinâmicas, por outro lado, dizem respeito ao estado de equilíbrio de um sistema. A densidade (ρ) e o calor específico (c_p) são duas dessas propriedades muito usadas na análise termodinâmica. O produto ρc_p ($\text{J}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$), comumente chamado de capacidade calorífica volumétrica, mede a capacidade de um material de armazenar energia térmica. Uma vez que substâncias que possuem densidade elevada são tipicamente caracterizadas por calores específicos com valores pequenos, muitos sólidos e líquidos, que são considerados meios bons para o armazenamento de energia, possuem capacidades caloríficas comparáveis ($\rho c_p > 1$ MJ/(m³·K)). Entretanto, devido às suas muito baixas densidades, os gases são muito pouco adequados para o armazenamento de energia térmica ($\rho c_p \approx 1$ kJ/(m³·K)). Os valores da densidade e do calor específico para uma grande variedade de sólidos, líquidos e gases são fornecidos nas tabelas do Apêndice A.

Em análises da transferência de calor, a razão entre a condutividade térmica e a capacidade calorífica volumétrica é uma importante propriedade chamada *difusividade térmica* α , que possui como unidades de m²/s:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

Ela mede a capacidade do material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la. Materiais com elevados α responderão rapidamente a mudanças nas condições térmicas a eles impostas, enquanto materiais com reduzidos α responderão mais lentamente, levando mais tempo para atingir uma nova condição de equilíbrio.

A precisão dos cálculos de engenharia depende da exatidão com que são conhecidos os valores das propriedades termofísicas [11-13]. Poderiam ser citados numerosos exemplos de defeitos em equipamentos e no projeto de processos, ou então de não-atendimento de especificações de *performance*, que poderiam ser atribuídos a informações erradas associadas à seleção de valores de propriedades-chaves utilizados na análise inicial do siste-

ma. A seleção de dados confiáveis para as propriedades é uma parte importante em qualquer análise criteriosa em engenharia. O uso ocasional de dados que não foram bem caracterizados ou avaliados, como podem ser achados em algumas literaturas e em manuais, deve ser evitado. Valores recomendados para muitas

propriedades termofísicas podem ser obtidos a partir da Referência 14. Essa referência, disponível na maioria das bibliotecas institucionais, foi preparada pelo Centro de Pesquisas de Propriedades Termofísicas (*Thermophysical Properties Research Center - TPRC*), na Universidade de Purdue.

EXEMPLO 2.1

A difusividade térmica α é a propriedade de transporte que controla um processo de transferência de calor por condução em regime transiente. Usando os valores apropriados de k , ρ e c_p , disponíveis no Apêndice A, calcule α para os seguintes materiais nas temperaturas indicadas: alumínio puro, 300 e 700 K; carbeto de silício, 1.000 K; parafina, 300 K.

SOLUÇÃO

Dados: Definição da difusividade térmica α .

Achar: Valores numéricos de α para materiais especificados em temperaturas definidas.

Propriedades: Tabela A.1, alumínio puro (300 K):

$$\left. \begin{array}{l} \rho = 2702 \text{ kg/m}^3 \\ c_p = 903 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)} \\ k = 237 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} \end{array} \right\} \alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{237 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}}{2702 \text{ kg/m}^3 \times 903 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}} = 97,1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \triangleleft$$

Tabela A.1, alumínio puro (700 K):

$$\left. \begin{array}{ll} \rho = 2702 \text{ kg/m}^3 & \text{a 300 K} \\ c_p = 1090 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)} & \text{a 700 K (por interpolação linear)} \\ k = 225 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} & \text{a 700 K (por interpolação linear)} \end{array} \right\}$$

Donde

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{225 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}}{2702 \text{ kg/m}^3 \times 1090 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}} = 76 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \triangleleft$$

Tabela A.2, carbeto de silício (1000 K):

$$\left. \begin{array}{ll} \rho = 3160 \text{ kg/m}^3 & \text{a 300 K} \\ c_p = 1195 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)} & \text{a 1000 K} \\ k = 87 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} & \text{a 1000 K} \end{array} \right\} \alpha = \frac{87 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}}{3160 \text{ kg/m}^3 \times 1195 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}} = 23 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \triangleleft$$

Tabela A.3, parafina (300 K):

$$\left. \begin{array}{ll} \rho = 900 \text{ kg/m}^3 \\ c_p = 2890 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)} \\ k = 0,24 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} \end{array} \right\} \alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0,24 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}}{900 \text{ kg/m}^3 \times 2890 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}} = 9,2 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s} \quad \triangleleft$$

Comentários:

1. Observe a dependência das propriedades termofísicas do alumínio e do carbeto de silício em relação à temperatura. Por exemplo, para o carbeto de silício, $\alpha(1000 \text{ K}) \approx 0,1 \times \alpha(300 \text{ K})$; logo, as propriedades desse material apresentam uma grande dependência da temperatura.
2. A interpretação física de α é que ela fornece uma medida do transporte de calor (k) em relação ao armazenamento de energia (ρc_p). Em geral, os sólidos metálicos possuem elevados α , enquanto os não-metálicos (por exemplo, a parafina) possuem valores de α mais baixos.
3. A interpolação linear dos valores das propriedades é em geral aceitável nos cálculos de engenharia.
4. O uso de densidades obtidas a uma temperatura baixa (300 K) em cálculos que envolvem temperaturas mais elevadas ignora os efeitos da expansão térmica, mas também é aceitável para cálculos de engenharia.

2.3

A Equação da Difusão de Calor (Difusão Térmica)

Um dos objetivos principais da análise da condução de calor é determinar o *campo de temperaturas* em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras. Ou seja, desejamos conhecer a *distribuição de temperaturas*, que representa como a temperatura varia com a posição no meio. Uma vez conhecida essa distribuição, o fluxo de calor por condução (fluxo térmico condutivo) em qualquer ponto do meio ou na sua superfície pode

ser determinado através da lei de Fourier. Outras importantes grandezas de interesse podem também ser determinadas. Para um sólido, o conhecimento da distribuição de temperaturas pode ser usado para verificar a sua integridade estrutural através da determinação de tensões, expansões e deflexões térmicas. A distribuição de temperaturas também pode ser usada para otimizar a espessura de um material isolante ou para determinar a com-

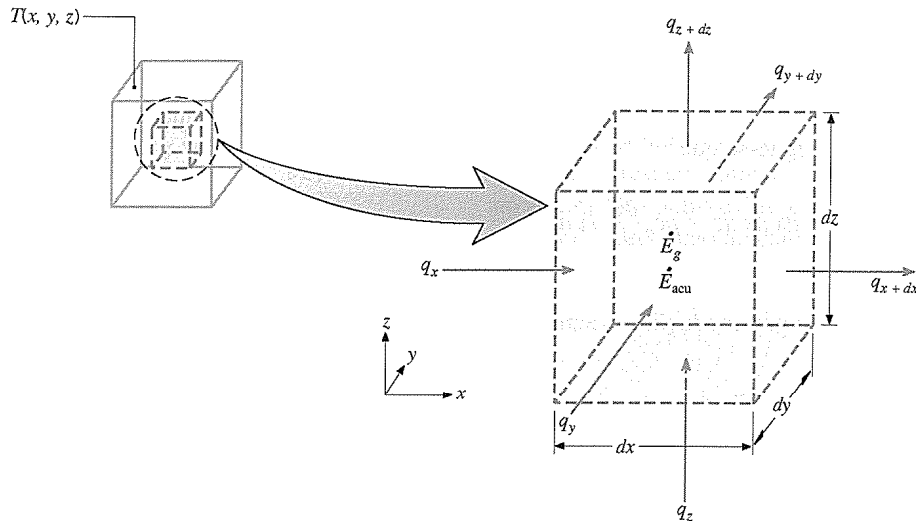


FIGURA 2.11 Volume de controle diferencial, $dx dy dz$, para análise da condução em coordenadas cartesianas.

patibilidade entre revestimentos especiais ou adesivos usados com o material.

Agora consideramos a forma pela qual a distribuição de temperaturas pode ser determinada. O procedimento segue a metodologia, descrita na Seção 1.3.3, de aplicação da exigência de conservação da energia. Neste caso, define-se um *volume de controle diferencial*, identificam-se os processos de transferência de energia relevantes e substituem-se as equações das taxas de transferência de calor apropriadas. O resultado é uma equação diferencial cuja solução, para condições de contorno especificadas, fornece a distribuição de temperaturas no meio.

Considere um meio homogêneo no interior do qual não há movimento macroscópico (advecção) e a distribuição de temperaturas $T(x,y,z)$ está representada em coordenadas cartesianas. Seguindo a metodologia de aplicar a exigência de conservação da energia (Seção 1.3.3), inicialmente definimos um volume de controle infinitesimalmente pequeno (diferencial), $dx \cdot dy \cdot dz$, conforme mostrado na Figura 2.11. Optando por formular a primeira lei para um dado instante do tempo, a segunda etapa consiste em identificar os processos energéticos que são relevantes para esse volume de controle. Se há gradientes de temperatura, irá ocorrer transferência de calor por condução através de cada uma das superfícies de controle. As taxas de transferência de calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle na posição de coordenadas x, y e z são indicadas pelos termos q_x, q_y e q_z , respectivamente. As taxas de transferência de calor por condução nas superfícies opostas podem, então, ser expressas como uma expansão em série de Taylor na qual, desprezando-se os termos de ordens superiores, tem-se

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2.11a)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (2.11b)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (2.11c)$$

Em palavras, a Equação 2.11a afirma simplesmente que o componente x da taxa de transferência de calor na posição $x + dx$ é

igual ao valor desse componente em x somado à quantidade pela qual ele varia com x multiplicada por dx .

No interior do meio pode haver, também, um termo de *fonte de energia* associado à taxa de geração de energia térmica. Esse termo é representado como

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz \quad (2.12)$$

onde \dot{q} é a taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume do meio (W/m^3). Além disso, também podem ocorrer variações na quantidade de energia interna térmica armazenada pela matéria no interior do volume de controle. Na ausência de mudança de fase, os efeitos da energia latente não são pertinentes, e o termo referente ao *acúmulo de energia* pode ser escrito como

$$\dot{E}_{acu} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (2.13)$$

onde $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$ é a taxa de variação com o tempo da energia sensível (térmica) do meio, por unidade de volume.

Mais uma vez, é importante notar que os termos \dot{E}_g e \dot{E}_{acu} representam processos físicos diferentes. O termo referente à geração de energia \dot{E}_g é a manifestação de algum processo de conversão de energia, envolvendo, de um lado, energia térmica e, de outro, alguma outra forma de energia, como energia química, elétrica ou nuclear. O termo é positivo (uma *fonte*) se a energia térmica está sendo gerada no material à custa de alguma outra forma de energia; ele é negativo (um *sumidouro*) se energia térmica está sendo consumida. Por outro lado, o termo relativo ao acúmulo de energia \dot{E}_{acu} se refere à taxa de variação da energia térmica acumulada pela matéria.

A última etapa da metodologia descrita na Seção 1.3.3 consiste em representar a conservação de energia utilizando as equações de taxas anteriormente desenvolvidas. Em uma base de *taxa*, a forma geral da exigência de conservação da energia é

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_g - \dot{E}_{sai} = \dot{E}_{acu} \quad (1.11c)$$

Logo, reconhecendo que as taxas de condução de calor constituem a entrada de energia, \dot{E}_{ent} , e a saída de energia, \dot{E}_{sai} , e substituindo as Equações 2.12 e 2.13, obtemos

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q} dx dy dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (2.14)$$

Substituindo as Equações 2.11, segue-se que

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (2.15)$$

As taxas de transferência de calor por condução podem ser determinadas pela lei de Fourier,

$$q_x = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.16a)$$

$$q_y = -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.16b)$$

$$q_z = -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.16c)$$

onde cada componente do fluxo térmico da Equação 2.6 foi multiplicado pela área da superfície de controle (diferencial) apropriada para obter a taxa de transferência de calor. Substituindo as Equações 2.16 na Equação 2.15 e dividindo todos os termos pelas dimensões do volume de controle ($dx \cdot dy \cdot dz$), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.17)$$

A Equação 2.17 é a forma geral, em coordenadas cartesianas, da equação da difusão de calor. Essa equação, frequentemente chamada de *equação do calor*, fornece a ferramenta básica para a análise da condução de calor. A partir de sua solução, podemos obter a distribuição de temperaturas $T(x,y,z)$ como uma função do tempo. A aparente complexidade dessa expressão não deve obscurecer o fato de que ela descreve uma condição física importante, qual seja, a conservação da energia. Você deve possuir uma clara compreensão do significado físico de cada uma das parcelas que aparecem nessa equação. Por exemplo, a parcela $\partial(k\partial T/\partial x)/\partial x$ está relacionada ao fluxo líquido de calor por condução para o interior do volume de controle na direção da coordenada x . Desta forma, multiplicando por dx ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = q_x'' - q_{x+dx}'' \quad (2.18)$$

Expressões similares se aplicam aos fluxos nas direções y e z . Portanto, em palavras, a Equação 2.17 postula que *em qualquer ponto do meio, a taxa líquida de transferência de energia por condução para o interior de um volume unitário somada à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica acumulada no interior deste volume*.

Com frequência, é possível trabalhar com versões simplificadas da Equação 2.17. Por exemplo, se a condutividade térmica for constante, a equação do calor será

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.19)$$

onde $\alpha = k/(\rho c_p)$ é a *difusividade térmica*. Simplificações adicionais da forma geral da equação do calor são frequentemente possíveis. Por exemplo, em condições de *regime estacionário* não pode haver variação na quantidade da energia armazenada; assim, a Equação 2.17 se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0 \quad (2.20)$$

Além disso, se a transferência de calor for *unidimensional* (por exemplo, na direção x) e *não existir geração de energia*, a Equação 2.20 se reduz a

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (2.21)$$

A importante consequência desse resultado é que, *em condições de transferência de calor unidimensional, em regime estacionário, sem geração de energia*, o fluxo de calor é uma constante na direção da transferência ($d\dot{q}/dx = 0$).

A equação do calor também pode ser escrita em coordenadas cilíndricas e esféricas. Os volumes de controle diferenciais para esses dois sistemas de coordenadas são mostrados nas Figuras 2.12 e 2.13.

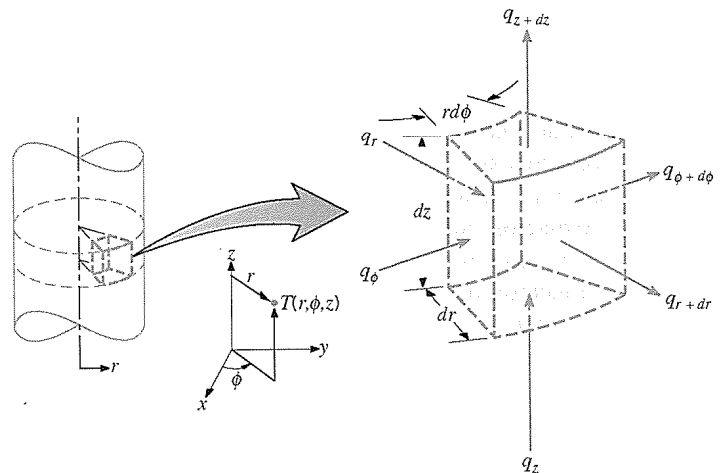


FIGURA 2.12 Volume de controle diferencial, $dr \cdot r d\phi \cdot dz$, para análise da condução em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z).

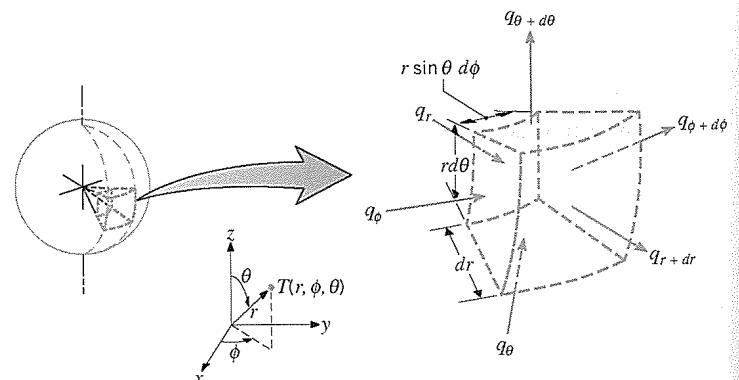


FIGURA 2.13 Volume de controle diferencial, $dr \cdot r \sin(\theta) d\phi \cdot r d\theta$, para análise da condução em coordenadas esféricas (r, ϕ, θ).

Coordenadas Cilíndricas Quando o operador grad (∇) da Equação 2.3 é representado em coordenadas cilíndricas, a forma geral do vetor fluxo térmico e, portanto, da lei de Fourier é

$$q'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} + k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (2.22)$$

na qual

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi} \quad q_z'' = -k\frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.23)$$

são os componentes do fluxo térmico nas direções radial, circumferencial e axial, respectivamente. Aplicando um balanço de energia no volume de controle diferencial da Figura 2.12, a seguinte forma geral da equação do calor é obtida:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.24)$$

Coordenadas Esféricas Em coordenadas esféricas, a forma geral do vetor fluxo térmico e da lei de Fourier é

$$q'' = -k\nabla T = -k\left(i\frac{\partial T}{\partial r} + j\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + k\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \quad (2.25)$$

na qual

$$q_r'' = -k\frac{\partial T}{\partial r} \quad q_\theta'' = -\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi} \quad (2.26)$$

são os componentes do fluxo térmico nas direções radial, polar e azimutal, respectivamente. Aplicando um balanço de energia no volume de controle diferencial da Figura 2.13, a seguinte forma geral da equação do calor é obtida:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.27)$$

Uma vez que é importante que você seja capaz de aplicar os princípios de conservação em volumes de controle diferenciais, você deve tentar deduzir a Equação 2.24 ou 2.27 (veja os Problemas 2.35 e 2.36). Note que o gradiente de temperatura na lei de Fourier deve ter unidades de K/m. Por esse motivo, ao determinar o gradiente para uma coordenada angular, ele deve estar expresso em termos de uma variação diferencial de *comprimento do arco*. Por exemplo, o componente do fluxo térmico na direção circumferencial no sistema de coordenadas cilíndricas é $\dot{q}_\phi = -(k/r)(\partial T/\partial \phi)$ e não $\dot{q}_\phi = -k(\partial T/\partial \phi)$.

EXEMPLO 2.2

A distribuição de temperaturas ao longo de uma parede com espessura de 1 m, em um certo instante de tempo, é dada por

$$T(x) = a + bx + cx^2$$

na qual T está em graus Celsius e x em metros, enquanto $a = 900^\circ\text{C}$, $b = -300^\circ\text{C/m}$, e $c = -50^\circ\text{C/m}^2$. Uma geração de calor uniforme, $\dot{q} = 1000 \text{ W/m}^3$, está presente na parede, cuja área é de 10 m^2 . O seu material possui as seguintes propriedades: $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$, $k = 40 \text{ W/(m K)}$ e $c_p = 4 \text{ kJ/(kg K)}$.

1. Determine a taxa de transferência de calor que entra na parede ($x = 0$) e que deixa a parede ($x = 1 \text{ m}$).
2. Determine a taxa de variação da energia acumulada na parede.
3. Determine a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo nas posições $x = 0, 0,25$ e $0,5 \text{ m}$.

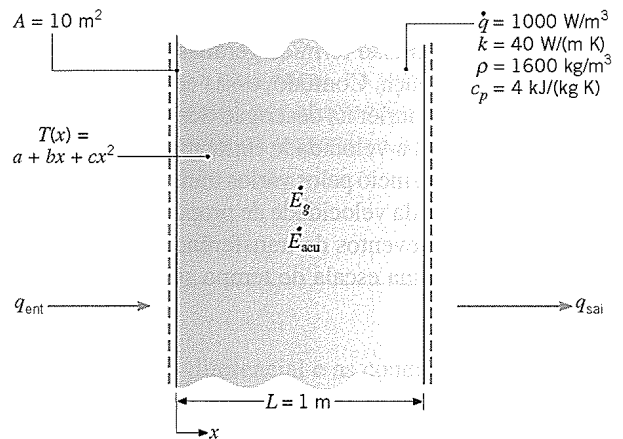
SOLUÇÃO

Dados: Distribuição de temperaturas $T(x)$ em um dado instante de tempo t em uma parede unidimensional com geração de calor uniforme.

Achar:

1. As taxas de transferência de calor entrando, $q_{\text{ent}}(x = 0)$, e saindo, $q_{\text{sai}}(x = 1 \text{ m})$, da parede.
2. A taxa de variação da energia acumulada na parede, \dot{E}_{acu} .
3. A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo em $x = 0, 0,25$ e $0,5 \text{ m}$.

Esquema:



Considerações:

1. Condução unidimensional na direção x .
2. Meio isotrópico com propriedades constantes.
3. Geração de calor interna uniforme, $\dot{q}(\text{W/m}^3)$.

Análise:

1. Lembre-se de que, uma vez conhecida a distribuição de temperaturas no meio, a determinação da taxa de transferência de calor por condução em qualquer ponto desse meio, ou nas suas superfícies, é uma tarefa simples com o uso da lei de Fourier. Assim, as taxas de transferência de calor desejadas

podem ser determinadas através da utilização da distribuição de temperaturas dada com a Equação 2.1. Desta forma,

$$q_{ent} = q_x(0) = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -kA(b + 2cx)_{x=0}$$

$$q_{ent} = -bkA = 300^\circ\text{C/m} \times 40 \text{ W/(m K)} \times 10 \text{ m}^2 = 120 \text{ kW} \quad \triangleleft$$

Analogamente,

$$q_{sai} = q_x(L) = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = -kA(b + 2cx)_{x=L}$$

$$q_{sai} = -(b + 2cL)kA = -[-300^\circ\text{C/m} + 2(-50^\circ\text{C/m}^2) \times 1 \text{ m}] \times 40 \text{ W/(m K)} \times 10 \text{ m}^2 = 160 \text{ kW} \quad \triangleleft$$

2. A taxa de variação da energia acumulada na parede \dot{E}_{acu} pode ser determinada aplicando-se um balanço de energia global na parede. Usando a Equação 1.11c para um volume de controle no entorno da parede,

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_g - \dot{E}_{sai} = \dot{E}_{acu}$$

no qual $\dot{E}_g = qAL$. Tem-se, então,

$$\dot{E}_{acu} = \dot{E}_{ent} + \dot{E}_g - \dot{E}_{sai} = q_{ent} + \dot{q}AL - q_{sai}$$

$$\dot{E}_{acu} = 120 \text{ kW} + 1000 \text{ W/m}^3 \times 10 \text{ m}^2 \times 1 \text{ m} - 160 \text{ kW}$$

$$\dot{E}_{acu} = -30 \text{ kW} \quad \triangleleft$$

3. A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo, em qualquer ponto do meio, pode ser determinada pela equação do calor, Equação 2.19, reescrita na forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p}$$

A partir da distribuição de temperaturas dada, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (b + 2cx) = 2c = 2(-50^\circ\text{C/m}^2) = -100^\circ\text{C/m}^2 \end{aligned}$$

Note que essa derivada é independente da posição no meio. Assim, a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é também independente da posição e é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{40 \text{ W/(m K)}}{1600 \text{ kg/m}^3 \times 4 \text{ kJ/(kg K)}} \times (-100^\circ\text{C/m}^2) \\ &\quad + \frac{1000 \text{ W/m}^3}{1600 \text{ kg/m}^3 \times 4 \text{ kJ/(kg K)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -6,25 \times 10^{-4}^\circ\text{C/s} + 1,56 \times 10^{-4}^\circ\text{C/s} \\ &= -4,69 \times 10^{-4}^\circ\text{C/s} \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Comentários:

1. A partir do resultado anterior, fica evidente que a temperatura em todos os pontos no interior da parede está diminuindo com o tempo.
2. A lei de Fourier pode sempre ser usada para calcular a taxa de transferência de calor por condução a partir do conhecimento da distribuição de temperaturas, mesmo em condições transientes com geração interna de calor.

Efeitos em Microescala Para a maioria das situações práticas, as equações da difusão térmica geradas neste texto podem ser usadas com confiança. Contudo, essas equações estão baseadas no uso da lei de Fourier na descrição dos efeitos condutivos, que não leva em conta a velocidade finita na qual a informação térmica é propagada no meio pelos vários transportadores de energia. As conseqüências da velocidade de propagação finita podem ser desprezadas se os eventos de transferência de calor de interesse ocorrerem em uma escala de tempo suficientemente longa, Δt , como

$$\frac{\lambda_{ipm}}{\bar{c}\Delta t} \ll 1 \quad (2.28)$$

As equações da difusão térmica deste texto são igualmente inválidas para problemas nos quais o espalhamento nas fronteiras deve ser considerado explicitamente. Por exemplo, a distribuição de temperaturas *no interior* do filme delgado da Figura 2.6b não pode ser determinada pelo uso das equações da difusão do calor anteriores. Discussões adicionais de aplicações de transferência de calor e métodos de análise, em micro e nanoescalas, estão disponíveis na literatura [1,15].

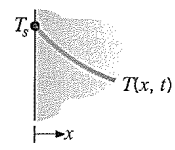
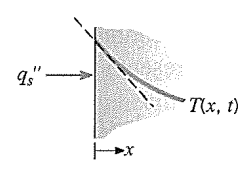
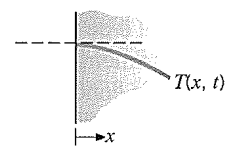
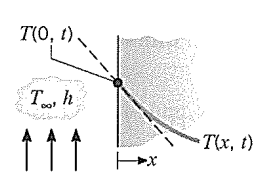
2.4 Condições de Contorno e Inicial

Para determinar a distribuição de temperaturas em um meio, é necessário resolver a forma apropriada da equação do calor. No entanto, tal solução depende das condições físicas existentes nas *fronteiras* do meio, e, se a situação variar com o tempo, a solução também depende das condições existentes no meio em algum *instante inicial*. Com relação às *condições nas fronteiras*, ou *condições de contorno*, há várias possibilidades comuns que são expressas de maneira simples em forma matemática. Como a equação do calor é de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais, duas condições de contorno devem ser fornecidas para cada coordenada espacial necessária para descrever o sistema. Como a

equação é de primeira ordem em relação ao tempo, apenas uma condição, chamada de *condição inicial*, deve ser especificada.

Os três tipos de condições de contorno frequentemente encontradas na transferência de calor estão resumidos na Tabela 2.2. As condições estão especificados na superfície $x = 0$, para um sistema unidimensional. A transferência de calor se dá no sentido positivo da direção x com a distribuição de temperaturas, que pode ser função do tempo, designada por $T(x,t)$. A primeira condição corresponde a uma situação na qual a superfície é mantida a uma temperatura fixa T_s . Ela é comumente chamada de uma *condição de Dirichlet* ou de uma condição de contorno de *pri-*

TABELA 2.2 Condições de contorno para a equação da difusão de calor na superfície ($x = 0$)

| | |
|--|---|
| <p>1. Temperatura da superfície constante</p> $T(0, t) = T_s \quad (2.29)$ |  |
| <p>2. Fluxo térmico na superfície constante</p> <p>(a) Fluxo térmico diferente de zero</p> $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = q_s'' \quad (2.30)$ |  |
| <p>(b) Superfície isolada termicamente ou adiabática</p> $\frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = 0 \quad (2.31)$ |  |
| <p>3. Condição de convecção na superfície</p> $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)] \quad (2.32)$ |  |

meira espécie. Ela é aproximada de perto, por exemplo, quando a superfície está em contato com um sólido em fusão ou com um líquido em ebulição. Em ambos os casos há transferência de calor na superfície, enquanto a superfície permanece na temperatura do processo de mudança de fase. A segunda condição corresponde à existência de um fluxo térmico fixo ou constante q_s na superfície. Esse fluxo térmico está relacionado ao gradiente de temperatura na superfície pela lei de Fourier, Equação 2.6, que pode ser escrita na forma

$$q_x''(0) = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s''$$

Ela é conhecida por *condição de Neumann* ou como uma condição de contorno de *segunda espécie*, e pode ser obtida através da fixação de um aquecedor elétrico na forma de uma fina película à superfície. Um caso particular dessa condição corresponde a uma superfície *perfeitamente isolada*, ou *adiabática*, superfície na qual $\partial T / \partial x|_{x=0} = 0$. A condição de contorno de *terceira espécie* corresponde à existência, na superfície, de um aquecimento (ou resfriamento) por convecção e é obtida a partir de um balanço de energia na superfície, conforme discutido na Seção 1.3.2.

EXEMPLO 2.3

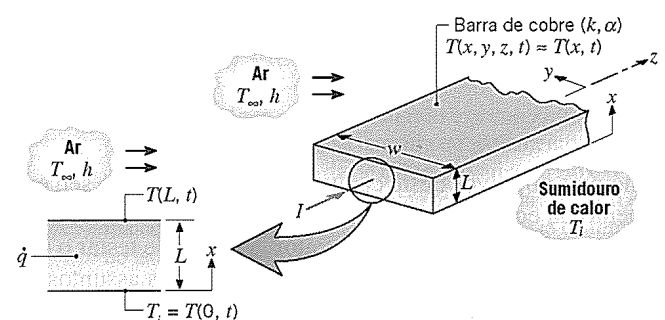
Uma longa barra de cobre com seção transversal retangular, cuja largura w é muito maior do que a sua espessura L , é mantida em contato com um sumidouro de calor em sua superfície inferior, e a temperatura ao longo da barra é aproximadamente igual à do sumidouro, T_i . De repente, uma corrente elétrica é passada através da barra e uma corrente de ar, com temperatura T_∞ , é passada sobre a sua superfície superior, enquanto a superfície inferior continua mantida a T_i . Obtenha a equação diferencial e as condições inicial e de contorno que podem ser usadas para determinar a temperatura em função da posição e do tempo na barra.

SOLUÇÃO

Dados: Uma barra de cobre inicialmente em equilíbrio térmico com um sumidouro de calor é subitamente aquecida pela passagem de uma corrente elétrica.

Achar: A equação diferencial e as condições inicial e de contorno necessárias para determinar a temperatura no interior da barra em função da posição e do tempo.

Esquema:



Considerações:

1. Uma vez que a barra é longa e $w \gg L$, os efeitos de pontas e laterais são desprezíveis e a transferência de calor no interior da barra é principalmente unidimensional na direção x .
2. Taxa volumétrica de geração de calor uniforme, \dot{q} .
3. Propriedades constantes.

Análise: A distribuição de temperaturas é governada pela equação do calor (2.17), que, para condições unidimensionais e de propriedades constantes do presente problema, se reduz a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1) \quad \triangleleft$$

onde a temperatura é uma função da posição e do tempo, $T(x, t)$. Como essa equação diferencial é de segunda ordem em relação à coordenada espacial x e de primeira ordem em relação ao tempo t , devem ser fornecidas duas condições de contorno na direção x e uma condição, chamada de condição inicial, para o tempo. A condição de contorno para a superfície inferior corresponde ao caso 1 da Tabela 2.2. Em particular, como a temperatura nessa superfície é mantida em um valor, T_i , constante ao longo do tempo, tem-se que

$$T(0, t) = T_i \quad (2) \quad \triangleleft$$

A condição de transferência de calor por convecção na superfície, caso 3 da Tabela 2.2, é apropriada para a superfície superior. Logo,

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h[T(L, t) - T_\infty] \quad (3) \quad \triangleleft$$

A condição inicial é inferida a partir do reconhecimento de que, antes da mudança nas condições, a barra encontrava-se a uma temperatura uniforme T_i . Assim,

$$T(x, 0) = T_i \quad (4) \quad \triangleleft$$

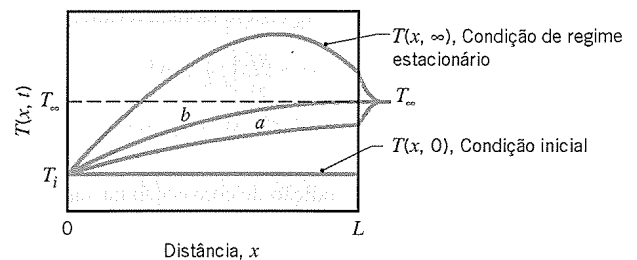
Se T_i , T_∞ , \dot{q} e h forem conhecidos, as Equações 1 a 4 podem ser resolvidas para se obter a distribuição da temperaturas $T(x, t)$ em função do tempo, após a imposição da corrente elétrica.

Comentários:

1. O *sumidouro de calor* em $x = 0$ poderia ser mantido pela exposição desta superfície a um banho de gelo ou pelo contato com uma *placa fria*. Uma placa fria possui canais refrigerantes que são usinados em um sólido de elevada condutividade térmica (em geral, cobre). Pela circulação de um líquido (em geral, água) através dos canais, a placa, e por-

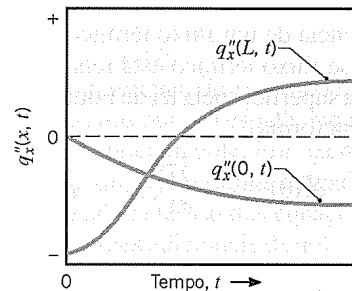
tanto a superfície com a qual ela está em contato, pode ser mantida a uma temperatura praticamente uniforme.

2. A temperatura da superfície superior, $T(L, t)$, variará com o tempo. Essa temperatura é uma incógnita e pode ser obtida após a determinação de $T(x, t)$.
3. Podemos usar nossa intuição física para esboçar distribuições de temperaturas na barra em tempos selecionados do início ao final do processo transiente. Se considerarmos que $T_\infty > T_i$ e que a corrente elétrica é suficientemente alta para aquecer a barra até temperaturas superiores a T_∞ , as distribuições a seguir corresponderiam à condição inicial ($t \leq 0$), à condição final (regime estacionário) ($t \rightarrow \infty$) e a dois tempos intermediários.



Note que as distribuições satisfazem às condições de contorno e inicial. Qual é a característica particular da distribuição identificada por (b)?

4. Nossa intuição pode, também, ser usada para inferir a forma na qual o fluxo térmico varia com o tempo nas superfícies ($x = 0, L$) da barra. Em coordenadas $q_x'' - t$, as variações no transiente são como mostradas a seguir,



Certifique-se de que as variações anteriores são consistentes com as distribuições de temperaturas do Comentário 3. Para $t \rightarrow \infty$, como $q_x''(0)$ e $q_x''(L)$ estão relacionados com a taxa volumétrica de geração de energia?

2.5

Resumo

Os principais objetivos deste capítulo foram melhorar o seu entendimento da equação da taxa condutiva (lei de Fourier) e familiarizar você com a equação do calor. Você pode testar o seu entendimento de conceitos relacionados com esses assuntos ao responder as questões a seguir.

- Na formulação geral da *lei de Fourier* (aplicável em qualquer geometria), quais são as grandezas vetoriais e escalares? Por que há um sinal de menos no lado direito desta equação?
- O que é uma *superfície isotérmica*? O que pode ser dito sobre o fluxo térmico em qualquer local desta superfície?

- Qual forma a *lei de Fourier* assume em cada direção ortogonal dos sistemas de coordenadas cartesiano, cilíndrico e esférico? Em cada caso, quais são as unidades do gradiente de temperatura? Você pode escrever cada equação de memória?
- Uma propriedade da matéria importante é definida pela *lei de Fourier*. Qual é ela? Qual é o seu significado físico? Quais são suas unidades?
- O que é um material *isotrópico*?
- Por que geralmente a condutividade térmica de um sólido é maior do que a de um líquido? Por que a condutividade térmica de um líquido é maior do que a de um gás?
- Por que geralmente a condutividade térmica de um sólido condutor elétrico é maior do que a de um não-condutor? Por que materiais como o óxido de berílio, o diamante e o carbetto de silício (veja a Tabela A.2) são exceções a esta regra?
- É a *condutividade térmica efetiva* de um sistema de isolamento uma manifestação verdadeira da eficácia com a qual calor é transferido através do sistema somente por condução?
- Por que a condutividade térmica de um gás aumenta com o aumento da temperatura? Por que ela é aproximadamente independente da pressão?
- Qual é o significado físico da *difusividade térmica*? Como ela é definida e quais são suas unidades?
- Qual é o significado físico de cada termo que aparece na *equação do calor*?
- Cite alguns exemplos de *geração de energia térmica*. Se a taxa na qual a energia térmica é gerada por unidade de volume, \dot{q} , variar com a posição em um meio de volume V , como pode ser determinada a taxa de geração de energia para o meio inteiro, \dot{E}_g , a partir do conhecimento de $q(x, y, z)$?
- Para um meio com reação química, qual tipo de reação fornece uma *fonte* de energia térmica ($\dot{q} > 0$)? Qual tipo de reação fornece um *sumidouro* de energia térmica ($\dot{q} < 0$)?
- Para resolver a *equação do calor*, determinando a distribuição de temperaturas em um meio, *condições de contorno* nas superfícies do meio devem ser especificadas. Que condições físicas são normalmente adequadas para este objetivo?

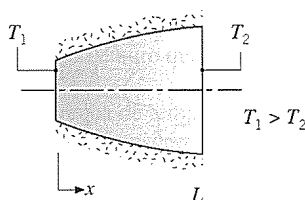
Referências

1. Flik, M. I., B.-I. Choi, and K. E. Goodson, *J. Heat Transfer*, **114**, 666, 1992.
2. Klemens, P. G., "Theory of the Thermal Conductivity of Solids," in R. P. Tye, Ed., *Thermal Conductivity*, Vol. 1, Academic Press, London, 1969.
3. Yang, H.-S., G.-R. Bai, L. J. Thompson, and J. A. Eastman, *Acta Materialia*, **50**, 2309, 2002.
4. Chen, G., *J. Heat Transfer*, **118**, 539, 1996.
5. Vincenti, W. G., and C. H. Kruger, Jr., *Introduction to Physical Gas Dynamics*, Wiley, New York, 1986.
6. McLaughlin, E., "Theory of the Thermal Conductivity of Fluids," in R. P. Tye, Ed., *Thermal Conductivity*, Vol. 2, Academic Press, London, 1969.
7. Foust, O. J., Ed., "Sodium Chemistry and Physical Properties," in *Sodium-NaK Engineering Handbook*, Vol. 1, Gordon & Breach, New York, 1972.
8. Mallory, J.-F., *Thermal Insulation*, Reinhold Book Corp., New York, 1969.
9. American Society of Heating, Refrigeration and Air Conditioning Engineers, *Handbook of Fundamentals*, Chapters 23–25 and 31, ASHRAE, New York, 2001.
10. Zeng, S. Q., A. Hunt, and R. Greif, *J. Heat Transfer*, **117**, 1055, 1995.
11. Sengers, J. V., and M. Klein, Eds., *The Technical Importance of Accurate Thermophysical Property Information*, National Bureau of Standards Technical Note No. 590, 1980.
12. Najjar, M. S., K. J. Bell, and R. N. Maddox, *Heat Transfer Eng.*, **2**, 27, 1981.
13. Hanley, H. J. M., and M. E. Baltatu, *Mech. Eng.*, **105**, 68, 1983.
14. Touloukian, Y. S., and C. Y. Ho, Eds., *Thermophysical Properties of Matter, The TPRC Data Series* (13 volumes on thermophysical properties: thermal conductivity, specific heat, thermal radiative, thermal diffusivity, and thermal linear expansion), Plenum Press, New York, 1970 through 1977.
15. Cahill, D. G., W. K. Ford, K. E. Goodson, G. D. Mahan, A. Majumdar, H. J. Maris, R. Merlin, and S. R. Phillpot, *App. Phys. Rev.*, **93**, 793, 2003.

Problemas

Lei de Fourier

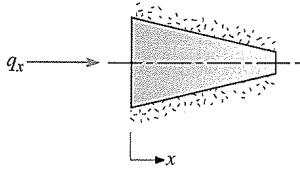
- 2.1 Considere condução de calor unidimensional, em regime estacionário, através da geometria axi-simétrica mostrada na figura.



Supondo propriedades constantes e nenhuma geração interna de calor, esboce a distribuição de temperaturas em um sistema de coordenadas $T - x$. Explique sucintamente a forma da curva obtida.

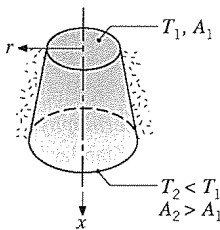
- 2.2 Um tubo de água quente, com raio externo r_1 , está a uma temperatura T_1 . Uma espessa camada de isolamento térmico, aplicada para reduzir a perda de calor, possui um raio externo r_2 e a sua superfície externa está a uma temperatura T_2 . Em um sistema de coordenadas $T - r$, esboce a distribuição de temperaturas no isolante para uma transferência de calor unidimensional, em estado estacionário, com propriedades constantes. Justifique, resumidamente, a forma da curva encontrada.

- 2.3 Uma casca esférica com raio interno r_1 e raio externo r_2 possui temperaturas superficiais T_1 e T_2 , respectivamente, sendo $T_1 > T_2$. Esboce a distribuição de temperaturas em coordenadas $T-r$ considerando condução unidimensional, em regime estacionário, com propriedades constantes. Justifique sucintamente a forma da curva proposta.
- 2.4 Considere condução de calor unidimensional, em regime estacionário, através da geometria simétrica mostrada na figura.



Supondo que não há geração interna de calor, desenvolva uma expressão para a condutividade térmica $k(x)$ para as seguintes condições: $A(x) = (1-x)$, $T(x) = 300(1-2x-x^3)$, e $q = 6000$ W, onde A está em metros quadrados, T em kelvins e x em metros.

- 2.5 Um tronco de cone sólido serve de suporte para um sistema que mantém a sua superfície superior a uma temperatura T_1 , enquanto a sua base encontra-se a uma temperatura $T_2 < T_1$.



A condutividade térmica do sólido depende da temperatura de acordo com a relação $k = k_0 - aT$, onde a é uma constante positiva. A superfície lateral do cone é isolada termicamente. As seguintes grandezas aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas ao longo da direção positiva do eixo x : a taxa de transferência de calor q_x , o fluxo térmico q_x , a condutividade térmica k , e o gradiente de temperatura dT/dx ?

- 2.6 Para determinar o efeito da dependência da condutividade térmica em relação à temperatura sobre a distribuição de temperaturas em um sólido, considere um material para o qual essa dependência possa ser representada por

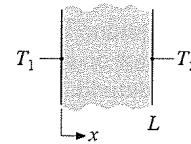
$$k = k_0 + aT$$

na qual k_0 é uma constante positiva e a é um coeficiente que pode ser positivo ou negativo. Esboce a distribuição de temperaturas, em regime estacionário, associada à transferência de calor através de uma parede plana para os três casos: $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$.

- 2.7 É solicitado a um jovem engenheiro o projeto de uma barreira para proteção térmica de um dispositivo eletrônico sensível, que pode vir a ser exposto à irradiação de um laser de alta potência. Tendo aprendido na época de estudante que um material com baixa condutividade térmica fornece boas características de isolamento, o engenheiro especifica para a barreira de proteção o uso de um aerogel nanoestruturado, caracterizado por uma condutividade térmica de $k_a = 0,005$ W/(m·K). O chefe do engenheiro questiona a razão da escolha do aerogel em função de ele ter uma baixa condutividade térmica. Considere a súbita irradiação com o laser de (a) alumínio puro, (b) vidro e (c) aerogel. O laser fornece uma irradiação de $G = 10 \times 10^6$ W/m². As absorvidades dos materiais são $\alpha = 0,2; 0,9$ e $0,8$ para o alumínio, o vidro e o aerogel, respectivamente, e a temperatura

inicial da barreira é de $T_i = 300$ K. Explique a razão da preocupação do chefe. *Sugestão:* Todo material sofre expansão (ou contração) térmica e as tensões locais que se desenvolvem no seu interior são, em uma primeira aproximação, proporcionais ao gradiente de temperatura local.

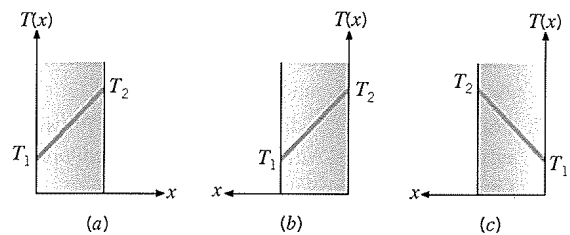
- 2.8 Considere condições de regime estacionário na condução unidimensional em uma parede plana com uma condutividade térmica de $k = 50$ W/(m·K) e uma espessura $L = 0,25$ m, sem geração interna de calor.



Determine o fluxo térmico e a grandeza desconhecida em cada caso e esboce a distribuição de temperaturas, indicando a direção do fluxo térmico.

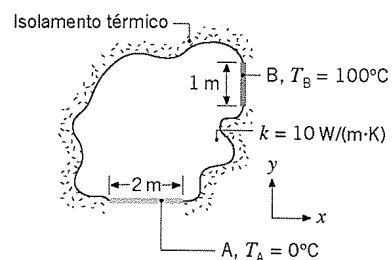
| Caso | T_1 (°C) | T_2 (°C) | dT/dx (K/m) |
|------|------------|------------|---------------|
| 1 | 50 | -20 | |
| 2 | -30 | -10 | |
| 3 | 70 | | 160 |
| 4 | | 40 | -80 |
| 5 | | 30 | 200 |

- 2.9 Considere uma parede plana com 100 mm de espessura e condutividade térmica de 100 W/(m·K). Sabe-se que há condições de regime estacionário quando $T_1 = 400$ K e $T_2 = 600$ K. Nessas condições, determine o fluxo térmico q''_x e o gradiente de temperatura dT/dx para os sistemas de coordenadas mostrados.



- 2.10 Um cilindro com raio r_0 , comprimento L e condutividade térmica k está imerso em um fluido de coeficiente de transferência de calor por convecção h e temperatura desconhecida T_∞ . Em um certo instante do tempo, a distribuição de temperaturas no cilindro é $T(r) = a + br^2$, na qual a e b são constantes. Obtenha expressões para a taxa de transferência de calor em r_0 e para a temperatura do fluido.

- 2.11 No corpo bidimensional mostrado na figura, sabe-se que o gradiente de temperatura na superfície A é de $\partial T/\partial y = 30$ K/m. Quais são os valores dos gradientes $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial x$ na superfície B?

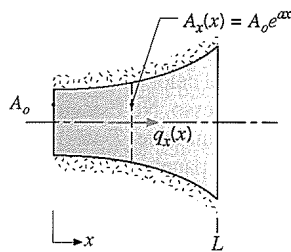


2.12 Trechos do oleoduto que atravessa o Alasca encontram-se acima do solo e são sustentados por suportes verticais de aço ($k = 25 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$) que possuem comprimento de 1 m e área de seção transversal de $0,005 \text{ m}^2$. Em condições normais de operação, sabe-se que a variação da temperatura ao longo do comprimento do suporte é governada por uma expressão com a forma

$$T = 100 - 150x + 10x^2$$

na qual T e x possuem unidades de $^{\circ}\text{C}$ e metros, respectivamente. Variações de temperatura na seção transversal do suporte são pequenas. Determine a temperatura e a taxa de condução de calor na junção suporte-oleoduto ($x = 0$) e na interface suporte-solo ($x = 1 \text{ m}$). Explique a diferença entre as taxas de transferência de calor.

2.13 Condução de calor unidimensional, em regime estacionário, ocorre em uma barra de condutividade térmica constante k e cuja área da seção transversal varia conforme a relação $A_x(x) = A_0 e^{ax}$, na qual A_0 e a são constantes. A superfície lateral da barra encontra-se isolada termicamente.



- (a) Escreva uma expressão para a taxa de condução de calor, $q_x(x)$. Use essa expressão para determinar a distribuição de temperaturas $T(x)$ e esboce, qualitativamente, a distribuição para $T(0) > T(L)$.
- (b) Agora, considere condições nas quais há geração de energia térmica no interior da barra, a uma taxa volumétrica de $\dot{q} = \dot{q}_0 \exp(-ax)$, na qual \dot{q}_0 é uma constante. Obtenha uma expressão para $q_x(x)$, quando a face esquerda da barra ($x = 0$) se encontra isolada termicamente.

Propriedades Termofísicas

2.14 Considere uma janela com $300 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$ em um avião. Para uma diferença de temperaturas de 80°C entre as superfícies interna e externa da janela, calcule a perda térmica através de janelas com $L = 10 \text{ mm}$ de espessura de policarbonato, de vidro cal-soda e de aerogel, respectivamente. As condutividades térmicas do aerogel e do policarbonato são $k_{ag} = 0,014 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ e $k_{pc} = 0,21 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, respectivamente. Avalie a condutividade térmica do vidro cal-soda a 300 K . Se o avião possuir 130 janelas e o custo para aquecer o ar da cabine é de $\$1/(\text{kW}\cdot\text{h})$, compare os custos associados às perdas térmicas através das janelas em um voo intercontinental de 8 horas.

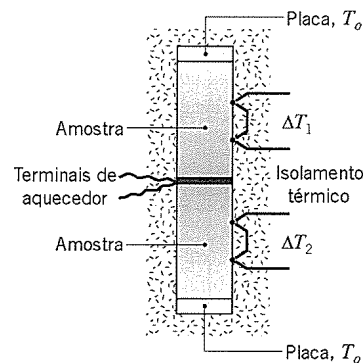
2.15 Ouro é normalmente usado no empacotamento de semicondutores para formar interconexões que transportam sinais elétricos entre diferentes dispositivos no conjunto. Além de serem boas condutoras de eletricidade, as conexões de ouro são também efetivas na proteção de dispositivos geradores de calor, aos quais elas estão conectadas ao conduzirem energia térmica dos dispositivos para a vizinhança, que são regiões mais frias. Considere um filme fino de ouro que tem uma seção transversal de $60 \text{ nm} \times 250 \text{ nm}$.

- (a) Para uma diferença de temperaturas imposta de 20°C , determine a energia transportada por condução ao longo de uma interconexão de filme fino com $1 \mu\text{m}$ de comprimento. Avalie as propriedades a 300 K .

- (b) Represente graficamente as condutividades térmicas na direção do comprimento e na direção da espessura do filme de ouro em função de sua espessura, L , para $30 \leq L \leq 140 \text{ nm}$.

2.16 Um anúncio de TV veiculado por um fabricante conhecido de isolamentos térmicos afirma que não é a espessura do material isolante que conta, mas sim o seu valor de R . O anúncio mostra que, para obter um valor de R igual a 19, você precisa: de uma camada com 18 ft de rocha; 15 in de madeira; ou apenas 6 in do material isolante anunciado. Esse anúncio é tecnicamente razoável? Se você for igual à maioria dos espectadores de televisão, você não sabe que o valor de R é definido como L/k , onde $L(\text{in})$ é a espessura do isolante e $k (\text{Btu in}/(\text{hr ft}^2 \text{ } ^{\circ}\text{F}))$ é a condutividade térmica do material.

2.17 Um aparelho para medir condutividade térmica emprega um aquecedor elétrico que é posicionado entre duas amostras idênticas, com 30 mm de diâmetro e 60 mm de comprimento, que são pressionadas entre placas que são mantidas a uma temperatura uniforme de $T_0 = 77^{\circ}\text{C}$, através da circulação de um fluido. Uma graxa condutora é colocada entre todas as superfícies para garantir um bom contato térmico. Termopares diferenciais, espaçados de 15 mm, são instalados no interior das amostras. As superfícies laterais das amostras são isoladas de modo a garantir transferência de calor unidimensional através das amostras.

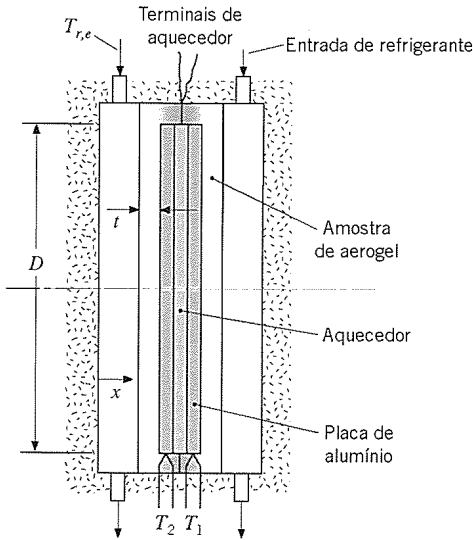


- (a) Com duas amostras de aço inoxidável 316 no aparelho, a corrente elétrica no aquecedor é de $0,353 \text{ A}$ a 100 V , e os termopares diferenciais indicam $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 25,0^{\circ}\text{C}$. Qual é a condutividade térmica do aço inoxidável das amostras? Qual é a temperatura média das amostras? Compare o seu resultado com o valor da condutividade térmica para este material fornecido na Tabela A.1.
- (b) Por engano, uma amostra de ferro Armco foi colocada na posição inferior do aparelho. Na posição superior permanece a amostra de aço inoxidável 316 utilizada no item (a). Para essa situação, a corrente no aquecedor é de $0,601 \text{ A}$ a 100 V , e os termopares diferenciais indicam $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 15,0^{\circ}\text{C}$. Quais são a condutividade térmica e a temperatura média da amostra de ferro Armco?
- (c) Qual é a vantagem em se construir o aparelho com duas amostras idênticas imprensando o aquecedor ao invés de construí-lo com uma única combinação aquecedor-amostra? Quando a perda de calor pelas superfícies laterais das amostras se tornaria significativa? Em quais condições você esperaria $\Delta T_1 \neq \Delta T_2$?

2.18 Um engenheiro deseja medir a condutividade térmica de um material na forma de aerogel. Espera-se que o aerogel tenha uma condutividade térmica extremamente pequena.

- (a) Explique por que o aparelho do Problema 2.17 não pode ser usado para obter uma medida precisa da condutividade térmica do aerogel.

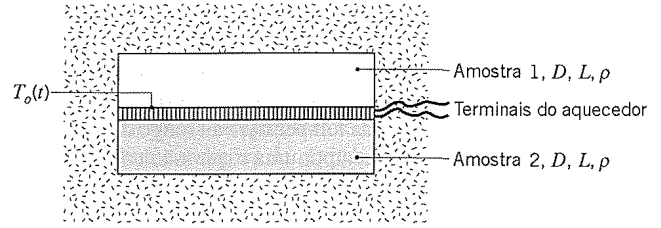
- (b) O engenheiro projeta um novo aparelho no qual um aquecedor elétrico, de diâmetro $D = 150$ mm, é incluído entre duas placas finas de alumínio. As temperaturas, T_1 e T_2 , das duas placas de alumínio, com 5 mm de espessura, são medidas no regime estacionário com termopares. Folhas do aerogel, com espessura $t = 5$ mm, são colocadas pelo lado externo das placas de alumínio, enquanto um refrigerante com uma temperatura de entrada $T_{r,e} = 25^\circ\text{C}$ mantém as superfícies exteriores do aerogel a uma temperatura baixa. As folhas circulares de aerogel são feitas de tal forma que elas envolvam o aquecedor e as placas de alumínio, proporcionando isolamento para minimizar as perdas térmicas radiais. No regime estacionário, $T_1 = T_2 = 55^\circ\text{C}$ e passam 125 mA no aquecedor com 10 V. Determine o valor da condutividade térmica do aerogel, k_a .
- (c) Calcule a diferença de temperaturas ao longo da espessura das placas de alumínio de 5 mm. Comente se é importante o conhecimento das posições axiais nas quais as temperaturas das placas de alumínio são medidas.
- (d) Sendo água líquida usada como refrigerante a uma vazão total de $\dot{m} = 1$ kg/min (0,5 kg/min para cada uma das duas correntes), calcule a temperatura de saída da água, $T_{r,s}$.



2.19 Um método para determinar a condutividade térmica k e o calor específico c_p de um material está ilustrado na figura. Inicialmente, as duas amostras idênticas, de diâmetro $D = 60$ mm e espessura $L = 10$ mm, e o aquecedor delgado se encontram a uma temperatura uniforme $T_i = 23,00^\circ\text{C}$, e todo o sistema é envolvido por um pó isolante térmico. Em um dado instante, o aquecedor é energizado, fornecendo um fluxo térmico uniforme q_0'' em cada uma das interfaces das amostras, que é mantido constante por um período de tempo Δt_0 . Imediatamente após o início do aquecimento, a temperatura nas interfaces, T_0 , está relacionada com o fluxo térmico através da expressão

$$T_0(t) - T_i = 2q_0'' \left(\frac{t}{\pi \rho c_p k} \right)^{1/2}$$

Em um determinado teste, o aquecedor elétrico dissipa uma potência de 15,0 W durante um período de $\Delta t_0 = 120$ s e a temperatura na interface, após 30 s de aquecimento, é de $T_0(30 \text{ s}) = 24,57^\circ\text{C}$. Passado um longo intervalo de tempo após o desligamento do aquecedor, $t \gg \Delta t_0$, as amostras atingem a temperatura uniforme de $T_0(\infty) = 33,50^\circ\text{C}$. A densidade do material das amostras, determinada através de medidas de volume e massa, é de $\rho = 3965$ kg/m³.



Determine o calor específico e a condutividade térmica do material testado. Olhando os valores das propriedades termofísicas nas Tabelas A.1 e A.2, identifique o material das amostras testadas.

A Equação do Calor

2.20 Em um dado instante de tempo, a distribuição de temperaturas no interior de um corpo homogêneo infinito é dada pela função

$$T(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - xy + 2yz$$

Considerando propriedades constantes e ausência de geração de calor no interior do corpo, determine as regiões nas quais a temperatura varia com o tempo.

2.21 Uma panela é usada para ferver água. Ela é colocada sobre um fogão, a partir do qual calor é transferido a uma taxa fixa q_0 . Há dois estágios no processo. No Estágio 1, a água é levada de sua temperatura inicial (ambiente) T_i até o ponto de ebulição, quando calor é transferido da panela para a água por convecção natural. Durante esse estágio pode-se admitir um valor constante do coeficiente de transferência de calor h , enquanto a temperatura média da água aumenta com o tempo, $T_w = T_w(t)$. No Estágio 2, a água encontra-se em ebulição e a sua temperatura mantém-se em um valor fixo, $T_w = T_{eb}$, enquanto o fornecimento de calor continua. Considere uma base de panela com espessura L e diâmetro D , com um sistema de coordenadas no qual $x = 0$ e $x = L$ nas superfícies em contato com o fogão e com a água, respectivamente.

(a) Escreva a forma da equação do calor e as condições inicial e de contorno que determinam a variação da temperatura com a posição e o tempo, $T(x, t)$, na base da panela ao longo do Estágio 1. Expresse o seu resultado em termos dos parâmetros q_0, D, L, h e T_w , assim como das propriedades pertinentes do material da panela.

(b) Durante o Estágio 2 a superfície da panela em contato com a água encontra-se a uma temperatura fixa, $T(L, t) = T_L > T_{eb}$. Escreva a forma da equação do calor e as condições de contorno que determinam a distribuição de temperaturas, $T(x)$, na base da panela. Expresse o seu resultado em termos dos parâmetros q_0, D, L e T_L , assim como das propriedades pertinentes do material da panela.

2.22 Em um elemento combustível cilíndrico para reator nuclear, com 50 mm de diâmetro, há geração interna de calor a uma taxa uniforme de $\dot{q} = 5 \times 10^7$ W/m³. Em condições de regime estacionário, a distribuição de temperaturas no seu interior tem a forma $T(r) = a + br^2$, onde T está em graus Celsius e r em metros, enquanto $a = 800^\circ\text{C}$ e $b = -4,167 \times 10^5^\circ\text{C}/\text{m}^2$. As propriedades do elemento combustível são $k = 30$ W/(m·K), $\rho = 1100$ kg/m³ e $c_p = 800$ J/(kg·K).

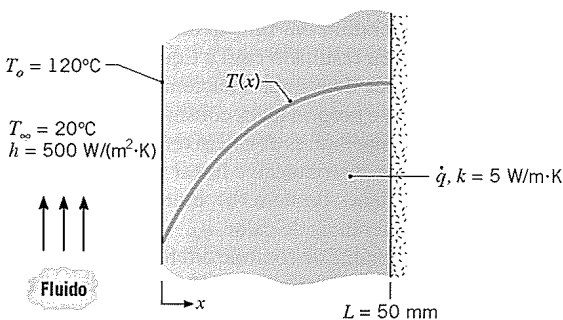
(a) Qual é a taxa de transferência de calor, por unidade de comprimento do elemento, em $r = 0$ (a linha central do elemento) e em $r = 25$ mm (a superfície)?

(b) Se o nível de potência do reator for subitamente aumentando para $\dot{q}_2 = 10^8$ W/m³, qual são as taxas iniciais da variação da temperatura com o tempo em $r = 0$ e $r = 25$ mm?

2.23 Observa-se que a distribuição de temperaturas, em estado estacionário, no interior de uma parede unidimensional com condutividade térmica de 50 W/(m·K) e espessura de 50 mm tem a forma $T(^\circ\text{C}) = a + bx^2$, onde $a = 200^\circ\text{C}$, $b = -2000^\circ\text{C}/\text{m}^2$ e x está em metros.

- (a) Qual a taxa de geração de calor \dot{q} na parede?
 (b) Determine os fluxos de calor nas duas faces da parede. De que forma esses fluxos de calor estão relacionados com a taxa de geração de calor?
- 2.24** Em um certo instante do tempo, a distribuição de temperaturas em uma parede com 0,3 m de espessura é $T(x) = a + bx + cx^2$, onde T está em graus Celsius e x em metros, $a = 200^\circ\text{C}$, $b = -200^\circ\text{C/m}$ e $c = 30^\circ\text{C/m}^2$. A parede possui uma condutividade térmica de $1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.
- (a) Com base em uma superfície de área unitária, determine a taxa de transferência de calor para dentro e para fora da parede, bem como a taxa de variação da energia acumulada no interior da parede.
 (b) Se a superfície fria estiver exposta a um fluido a 100°C , qual é o coeficiente de transferência de calor por convecção?
- 2.25** Em uma parede plana com espessura $2L = 40 \text{ mm}$ e condutividade térmica $k = 5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ há geração de calor volumétrica uniforme a uma taxa \dot{q} , enquanto transferência de calor por convecção ocorre em suas duas superfícies ($x = -L, +L$), cada uma exposta a um fluido com temperatura $T_\infty = 20^\circ\text{C}$. Em condições de regime estacionário, a distribuição de temperaturas no interior da parede tem a forma $T(x) = a + bx + cx^2$, onde $a = 82,0^\circ\text{C}$, $b = -210^\circ\text{C/m}$, $c = -2 \times 10^4^\circ\text{C/m}^2$ e x está em metros. A origem da coordenada x encontra-se no plano central da parede.
- (a) Esboce a distribuição de temperaturas e identifique características físicas significativas.
 (b) Qual é a taxa volumétrica de geração de calor \dot{q} no interior da parede?
 (c) Determine os fluxos térmicos nas superfícies, $q''(-L)$ e $q''(+L)$. Como esses fluxos estão relacionados com a taxa de geração de calor?
 (d) Quais são os coeficientes de transferência de calor por convecção nas superfícies $x = -L$ e $x = +L$?
 (e) Obtenha uma expressão para a distribuição de fluxos térmicos, $q''(x)$. O fluxo térmico é nulo em algum local? Explique qualquer característica significativa desta distribuição.
 (f) Se a fonte da geração térmica for subitamente desativada ($\dot{q} = 0$), qual é a taxa de variação da energia acumulada na parede neste instante?
 (g) Com $\dot{q} = 0$, qual temperatura de parede será atingida após um longo período de tempo? Que quantidade de energia tem que ser removida da parede pelo fluido, por unidade de área da parede (J/m^2), para ela atingir esse estado? A densidade e o calor específico do material da parede são 2600 kg/m^3 e $800 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$, respectivamente.

2.26 Condução unidimensional, em regime estacionário, com geração de energia interna uniforme ocorre em uma parede plana com espessura de 50 mm e uma condutividade térmica constante igual a $5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$. Nessas condições, a distribuição de temperaturas tem a forma $T(x) = a + bx + cx^2$. A superfície em $x = 0$ está a uma temperatura $T(0) \equiv T_0 = 120^\circ\text{C}$. Nessa superfície, há convecção com um fluido a $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ com $h = 500 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$. A superfície em $x = L$ é isolada termicamente.

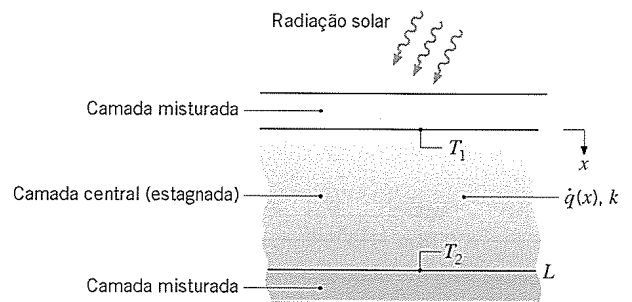


- (a) Utilizando um balanço de energia global na parede, calcule a taxa de geração interna de energia.
 (b) Determine os coeficientes a, b e c aplicando as condições de contorno na distribuição de temperaturas especificada. Use os resultados para calcular e representar graficamente a distribuição de temperaturas.
 (c) Considere condições nas quais o coeficiente de transferência de calor por convecção seja dividido por dois, com a taxa de geração interna de energia permanecendo inalterada. Determine os novos valores de a, b e c e use os resultados para representar graficamente a distribuição de temperaturas. *Sugestão:* note que $T(0)$ não é mais 120°C .
 (d) Sob condições nas quais a geração interna de energia é dobrada e o coeficiente por convecção permanece inalterado ($h = 500 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$), determine os novos valores de a, b e c e represente graficamente a distribuição de temperaturas correspondente. Referindo-se aos resultados das partes (b), (c) e (d) como Casos 1, 2 e 3, respectivamente, compare as distribuições de temperaturas para os três casos e discuta as influências de h e \dot{q} nas distribuições.

2.27 Um tanque solar de gradiente salino é um corpo raso de água, composto por três camadas distintas de fluidos, que é usado para coletar energia solar. As camadas externas superior e inferior encontram-se bem misturadas e servem para manter as superfícies superior e inferior da camada intermediária em temperaturas uniformes T_1 e T_2 , onde $T_2 > T_1$. Embora exista movimentação do fluido nas camadas misturadas, tal movimento não está presente na camada central. Considere condições nas quais a absorção de radiação solar na camada central implique em geração de calor não-uniforme na forma $\dot{q} = Ae^{-ax}$ e a distribuição de temperaturas nessa camada seja

$$T(x) = -\frac{A}{ka^2} e^{-ax} + Bx + C$$

As grandezas $A(\text{W/m}^3)$, $a(1/\text{m})$, $B(\text{K/m})$ e $C(\text{K})$ são constantes conhecidas que possuem as unidades indicadas, e k é a condutividade térmica, que também é constante.

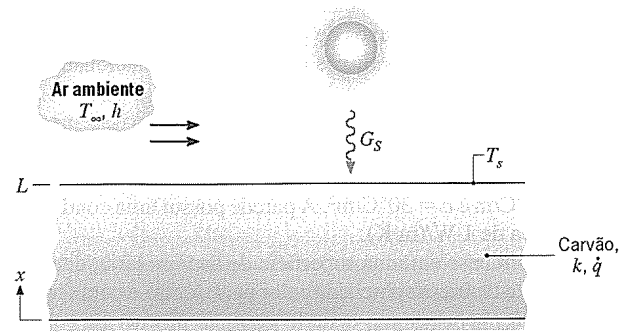
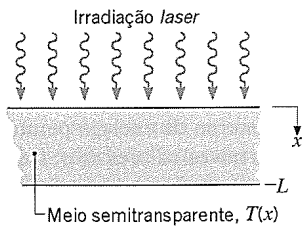


- (a) Obtenha expressões para a taxa, por unidade de área, na qual o calor é transferido da camada inferior misturada para a camada central e da camada central para a camada superior misturada.
 (b) Determine se as condições do sistema são de regime estacionário ou de regime transiente.
 (c) Obtenha uma expressão para a taxa na qual a energia térmica é gerada em toda camada central, por unidade de área superficial.

2.28 A distribuição de temperaturas, em regime estacionário, em um material semitransparente, com condutividade térmica k e espessura L , exposto à irradiação laser é descrita por

$$T(x) = -\frac{A}{ka^2} e^{-ax} + Bx + C$$

onde A , a , B e C são constantes conhecidas. Nessa situação, a absorção de radiação no material é manifestada por um termo de geração de calor distribuída, $\dot{q}(x)$.



- (a) Obtenha expressões para os fluxos de calor por condução nas superfícies superior e inferior.
- (b) Deduza uma expressão para $\dot{q}(x)$.
- (c) Desenvolva uma expressão para a taxa na qual a radiação é absorvida em todo material, por unidade de área superficial. Expresse o seu resultado em termos das constantes conhecidas para a distribuição de temperaturas, da condutividade térmica do material e de sua espessura.

- (a) Escreva a forma para o regime estacionário da equação da difusão térmica para a camada de carvão. Verifique se essa equação é satisfeita pela distribuição de temperaturas com a forma

$$T(x) = T_s + \frac{\dot{q}L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$$

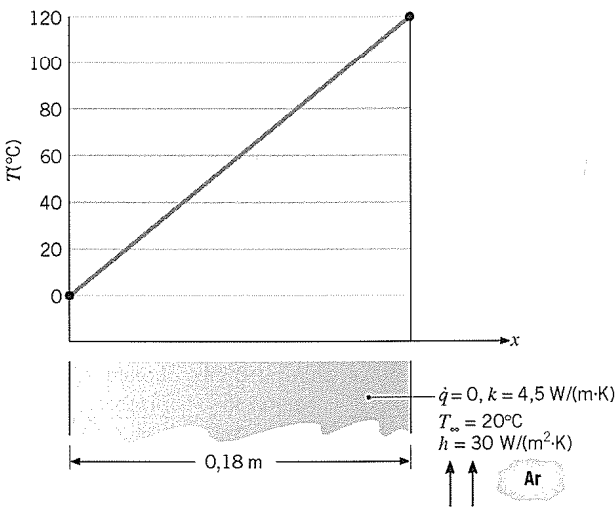
A partir dessa distribuição, o que você pode dizer sobre as condições existentes na superfície inferior ($x = 0$)? Esboce a distribuição de temperaturas e aponte suas principais características.

- 2.29** A distribuição de temperaturas, em regime estacionário, em uma parede unidimensional com condutividade térmica k e espessura L tem a forma $T = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Desenvolva expressões para a taxa de geração de calor por unidade de volume na parede e para os fluxos térmicos em suas duas superfícies ($x = 0, L$).

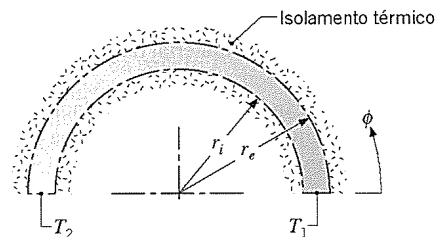
- (b) Obtenha uma expressão para a taxa de transferência de calor por condução, por unidade de área, em $x = L$. Aplicando um balanço de energia em uma superfície de controle representada pela superfície superior da camada, obtenha uma expressão para T_s . Calcule T_s e $T(0)$ para as condições especificadas.

- 2.30** Condução unidimensional, em regime estacionário e sem geração interna de energia, está ocorrendo em uma parede plana com condutividade térmica constante.

- (c) Os valores médios diários de G_s e h dependem de uma série de fatores, tais como o período do ano, condições de nebulosidade e do vento. Para $h = 5 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$, calcule e represente graficamente T_s e $T(0)$ em função do valor de G_s para $50 \leq G_s \leq 500 \text{ W}/\text{m}^2$. Para $G_s = 400 \text{ W}/\text{m}^2$, calcule e represente graficamente T_s e $T(0)$ em função de h para $5 \leq h \leq 50 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$.



- 2.32** O sistema cilíndrico ilustrado possui variações de temperatura nas direções r e z desprezíveis. Considere que $\Delta r = r_e - r_i$ seja pequena quando comparada a r_i e represente o comprimento na direção z , normal à página, por L .



- (a) É possível a distribuição de temperaturas mostrada no gráfico? Explique sucintamente o seu raciocínio.
- (b) Com a temperatura em $x = 0$ e a temperatura do fluido fixas em $T(0) = 0^\circ\text{C}$ e $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, respectivamente, calcule e represente graficamente a temperatura em $x = L$, $T(L)$, como uma função de h para $10 \leq h \leq 100 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$. Explique sucintamente os seus resultados.

- (a) Começando pela definição de um volume de controle apropriado e considerando os efeitos de geração e acúmulo de energia, deduza a equação diferencial que descreve a variação da temperatura em função da coordenada angular ϕ . Compare o seu resultado com a Equação 2.24.

- 2.31** Em uma camada plana de carvão, com espessura $L = 1 \text{ m}$, ocorre geração volumétrica uniforme a uma taxa $\dot{q} = 20 \text{ W}/\text{m}^3$ devido à lenta oxidação de partículas de carvão. Segundo valores médios diários, a superfície superior da camada transfere calor por convecção para o ar ambiente, no qual $h = 5 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ e $T_\infty = 25^\circ\text{C}$, enquanto recebe irradiação solar em uma quantidade $G_s = 400 \text{ W}/\text{m}^2$. Irradiação a partir da atmosfera pode ser desprezada. A absorvidade em relação aos raios solares e a emissividade da superfície são, cada uma, $\alpha_s = \varepsilon = 0,95$.

- (b) Para condições de regime estacionário, sem a geração interna de calor e propriedades constantes, determine a distribuição de temperaturas $T(\phi)$ em termos das constantes T_1 , T_2 , r_i e r_e . Esta distribuição é linear em ϕ ?
- (c) Para as condições do item (b), escreva a expressão para a taxa de transferência de calor, q_ϕ .

- 2.33** Partindo de um volume de controle diferencial em forma de uma casca cilíndrica, desenvolva a equação da difusão térmica para um sistema unidimensional na direção radial em coordenadas

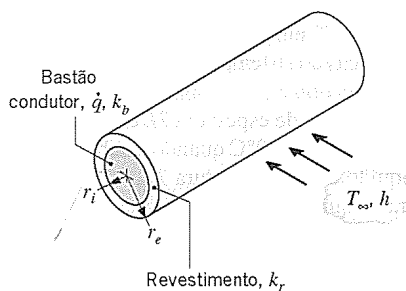
cilíndricas com geração interna de calor. Compare o seu resultado com a Equação 2.24.

- 2.34 Partindo de um volume de controle diferencial em forma de uma casca esférica, desenvolva a equação da difusão térmica para um sistema unidimensional na direção radial em coordenadas esféricas com geração interna de calor. Compare seu resultado com a Equação 2.27.
- 2.35 Desenvolva a equação da difusão térmica, Equação 2.24, em coordenadas cilíndricas, a partir do volume de controle diferencial mostrado na Figura 2.12.
- 2.36 Desenvolva a equação da difusão térmica, Equação 2.27, em coordenadas esféricas, a partir do volume de controle diferencial mostrado na Figura 2.13.
- 2.37 Uma tubulação de vapor é envolvida por isolamento térmico cujos raios interno e externo são r_i e r_e , respectivamente. Em um dado instante de tempo, sabe-se que a distribuição de temperaturas no isolamento tem a forma

$$T(r) = C_1 \ln\left(\frac{r}{r_e}\right) + C_2$$

O sistema encontra-se em regime estacionário ou transiente? Como variam com o raio o fluxo térmico e a taxa de transferência de calor?

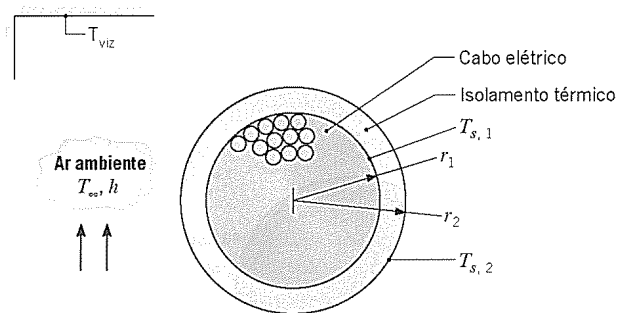
- 2.38 Em um longo tubo circular, com raios interno e externo r_1 e r_2 , respectivamente, temperaturas uniformes T_1 e T_2 são mantidas em suas superfícies interna e externa enquanto geração de energia térmica ocorre no interior de sua parede ($r_1 < r < r_2$). Considere condições de regime estacionário, nas quais $T_1 > T_2$. É possível manter uma distribuição de temperaturas radial linear no interior da parede? Caso afirmativo, que condições especiais devem existir?
- 2.39 A passagem de uma corrente elétrica através de um longo bastão condutor, de raio r_i e condutividade térmica k_b , resulta em um aquecimento volumétrico uniforme a uma taxa \dot{q} . O bastão condutor é coberto por um revestimento de material não-condutor elétrico, com raio externo r_e e condutividade térmica k_r . A superfície externa é resfriada por convecção por um fluido.



Para condições de regime estacionário, escreva formas apropriadas da equação do calor para o bastão e para o revestimento. Enuncie condições de contorno apropriadas para a solução dessas equações.

- 2.40 Condução bidimensional, em regime estacionário, ocorre em um sólido cilíndrico oco de condutividade térmica $k = 16 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, raio externo $r_e = 1 \text{ m}$ e comprimento total $2z_c = 5 \text{ m}$, onde a origem do sistema de coordenadas encontra-se localizada no meio da linha central. A superfície interna do cilindro é isolada termicamente e a distribuição de temperaturas no cilindro tem a forma $T(r,z) = a + br^2 + c \ln(r) + dz^2$, na qual $a = 20^\circ\text{C}$, $b = 150^\circ\text{C/m}^2$, $c = -12^\circ\text{C}$, $d = -300^\circ\text{C/m}^2$, e r e z estão em metros.
 - (a) Determine o raio interno r_i do cilindro.
 - (b) Obtenha uma expressão para a taxa volumétrica de geração de calor, \dot{q} (W/m^3).

- (c) Determine a distribuição axial dos fluxos térmicos na superfície externa, $q_r''(r_o, z)$. Qual é a taxa de transferência de calor na superfície externa? Ela ocorre para dentro ou para fora do cilindro?
 - (d) Determine a distribuição radial dos fluxos térmicos nas faces extremas do cilindro, $q_z''(r, +z_0)$ e $q_z''(r, -z_0)$. Quais são as taxas de transferência de calor correspondentes? Elas ocorrem para dentro ou para fora do cilindro?
 - (e) Verifique que os seus resultados são consistentes com um balanço de energia global no cilindro.
- 2.41 Um cabo elétrico, de raio r_1 e condutividade térmica k_c , encontra-se coberto por uma camada isolante cuja superfície externa possui raio r_2 e troca calor por convecção e por radiação com o ar circundante e a vizinhança, respectivamente. Quando uma corrente elétrica passa pelo cabo, há geração de energia térmica em seu interior a uma taxa volumétrica \dot{q} .



- (a) Escreva as formas da equação da difusão térmica, em regime estacionário, para o isolamento e para o cabo. Verifique se essas equações são satisfeitas pelas seguintes distribuições de temperaturas:

Isolamento térmico: $T(r) = T_{s,2} + (T_{s,1} - T_{s,2}) \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}$

Cabo: $T(r) = T_{s,1} + \frac{\dot{q}r_1^2}{4k_c} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right)$

Esboce a distribuição de temperaturas, $T(r)$, no cabo e na manta, identificando as principais características.

- (b) Utilizando a lei de Fourier, mostre que a taxa de transferência de calor por condução, por unidade de comprimento, através do isolamento pode ser representada por

$$q_r' = \frac{2\pi k_i (T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln(r_2/r_1)}$$

Usando um balanço de energia em uma superfície de controle envolvendo o cabo, obtenha uma expressão alternativa para q_r' , escrevendo o seu resultado em termos de \dot{q} e r_1 .

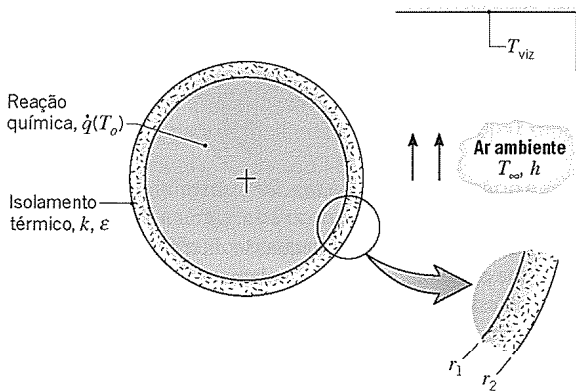
- (c) Fazendo um balanço de energia em uma superfície de controle colocada ao redor da superfície externa da camada isolante, obtenha uma expressão na qual $T_{s,2}$ possa ser determinada como uma função de \dot{q} , r_1 , h , T_∞ , ε e T_{viz} .
- (d) Considere condições nas quais uma corrente elétrica de 250 A atravessa um cabo cuja resistência elétrica por unidade de comprimento é de $R_e' = 0,005 \Omega/\text{m}$, com um raio $r_1 = 15 \text{ mm}$ e condutividade térmica $k_c = 200 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$. Para $k_i = 0,15 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$; $r_2 = 15,5 \text{ mm}$; $h = 25 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}$; $\varepsilon = 0,9$; $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ e $T_{\text{viz}} = 35^\circ\text{C}$, calcule as temperaturas superficiais, $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$, bem como a temperatura T_0 na linha de centro do cabo.
- (e) Mantendo todas as demais condições, calcule e represente graficamente T_0 , $T_{s,1}$ e $T_{s,2}$ como uma função de r_2 , para $15,5 \leq r_2 \leq 20 \text{ mm}$.

- 2.42 Uma casca esférica com raios interno e externo r_i e r_e , respectivamente, contém componentes que dissipam calor de tal modo que em um dado instante de tempo a distribuição de temperaturas na casca é representada por uma expressão com a forma

$$T(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

Essas condições correspondem a um regime estacionário ou transiente? Como o fluxo térmico e a taxa de transferência de calor variam em função do raio?

- 2.43 Uma mistura quimicamente reativa é armazenada em um recipiente esférico com paredes finas, de raio $r_1 = 200$ mm. A reação exotérmica gera calor a uma taxa volumétrica uniforme e dependente da temperatura na forma $\dot{q} = \dot{q}_0 \exp(-A/T_0)$, onde $\dot{q}_0 = 5000$ W/m³, $A = 75$ K e T_0 é a temperatura da mistura em kelvins. O recipiente é envolto por uma camada de material isolante que possui raio externo r_2 , condutividade térmica k e emissividade ε . A superfície externa do isolamento troca calor por convecção e radiação com o ar adjacente e uma grande vizinhança, respectivamente.



- (a) Escreva a forma do estado estacionário da equação da difusão térmica para o isolante. Verifique se essa equação é satisfeita pela seguinte distribuição de temperaturas

$$T(r) = T_{s,1} - (T_{s,1} - T_{s,2}) \left[\frac{1 - (r_1/r)}{1 - (r_1/r_2)} \right]$$

Esboce a distribuição de temperaturas, $T(r)$, identificando as suas principais características.

- (b) Utilizando a lei de Fourier, mostre que a taxa de transferência de calor por condução através do isolamento pode ser representada por

$$q_r = \frac{4\pi k(T_{s,1} - T_{s,2})}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

Fazendo um balanço de energia em uma superfície de controle envolvendo o recipiente, obtenha uma expressão alternativa para q_r , expressando o seu resultado em termos de \dot{q} e r_1 .

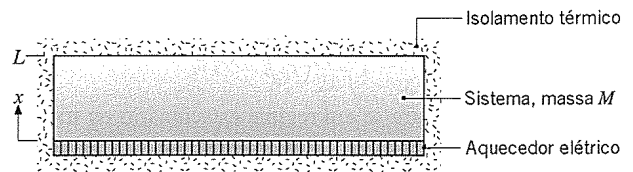
- (c) Fazendo um balanço de energia em uma superfície de controle coincidente com a superfície externa da camada de isolamento, obtenha uma expressão na qual $T_{s,2}$ possa ser determinada em função de \dot{q} , r_1 , h , T_∞ , ε e T_{viz} .
- (d) O engenheiro de processos deseja manter a temperatura no reator em $T_0 = T(r_1) = 95^\circ\text{C}$ em condições nas quais $k = 0,05$ W/(m·K); $r_2 = 208$ mm; $h = 5$ W/(m²·K); $\varepsilon = 0,9$; $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ e $T_{viz} = 35^\circ\text{C}$. Quais são a temperatura real do reator e a temperatura da superfície externa do isolamento térmico, $T_{s,2}$?

- (e) Calcule e represente graficamente a variação de $T_{s,2}$ em função de r_2 para $201 \leq r_2 \leq 210$ mm. O engenheiro está pre-

ocupado com eventuais acidentes por queimadura que possam ocorrer com o pessoal que entrar em contato com a superfície exposta do isolante térmico. O aumento da espessura da camada de isolamento térmico é uma solução prática para manter $T_{s,2} \leq 45^\circ\text{C}$? Que outro parâmetro poderia ser alterado para reduzir o valor de $T_{s,2}$?

Representações Gráficas

- 2.44 O sistema unidimensional, mostrado na figura, possui massa M , propriedades constantes, não apresenta geração de calor em seu interior e encontra-se inicialmente a uma temperatura uniforme T_i . O aquecedor elétrico é subitamente energizado, fornecendo um fluxo térmico uniforme q''_0 na superfície $x = 0$. A fronteira em $x = L$, bem como todas as demais fronteiras do sistema, encontram-se perfeitamente isoladas.



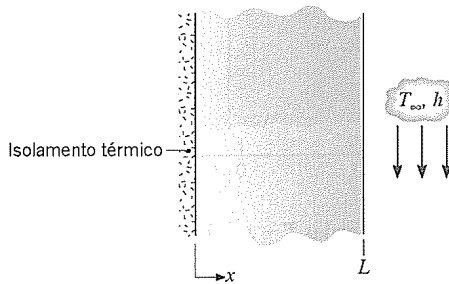
- (a) Escreva a equação diferencial e identifique as condições inicial e de contorno que poderiam ser usadas para determinar a temperatura em função da posição e do tempo no sistema.
- (b) Em coordenadas $T-x$, esboce as distribuições de temperaturas para a condição inicial ($t \leq 0$) e para vários outros instantes de tempo após o aquecedor ser energizado. Uma distribuição de temperaturas em estado estacionário será atingida em algum instante?
- (c) Em coordenadas $q''_x - t$, esboce o fluxo de calor $q''_x(x,t)$ nos planos $x = 0$, $x = L/2$ e $x = L$ em função do tempo.
- (d) Após haver transcorrido um intervalo de tempo t_e desde a energização do aquecedor, a sua alimentação elétrica é desligada. Considerando que o isolamento térmico é perfeito, após um certo tempo o sistema atingirá uma temperatura final uniforme T_f . Desenvolva uma expressão que permita determinar T_f em função dos parâmetros q''_0 , t_e , T_i e das características do sistema M , c_p e A_s (a área superficial do aquecedor).

- 2.45 Uma grande placa de espessura $2L$ encontra-se a uma temperatura uniforme $T_i = 200^\circ\text{C}$ quando é subitamente imersa em um banho líquido com temperatura $T_\infty = 20^\circ\text{C}$. A transferência de calor para o líquido é caracterizada pelo coeficiente convectivo h .

- (a) Com $x = 0$ correspondendo ao plano central da placa, em coordenadas $T-x$, esboce as distribuições de temperaturas para as seguintes condições: condição inicial ($t \leq 0$), condição de regime estacionário ($t \rightarrow \infty$) e dois tempos intermediários.
- (b) Em coordenadas $q''_x - t$, esboce a variação com o tempo do fluxo térmico em $x = L$.
- (c) Sendo $h = 100$ W/(m²·K), qual é o fluxo térmico em $x = L$ e $t = 0$? Sendo a condutividade térmica da placa igual $k = 50$ W/(m·K), qual é o gradiente de temperatura correspondente em $x = L$?
- (d) Considere uma placa de espessura $2L = 20$ mm, com densidade $\rho = 2770$ kg/m³ e calor específico $c_p = 875$ J/(kg·K). Fazendo um balanço de energia na placa, determine a quantidade de energia, por unidade de área superficial da placa (J/m²), que é transferida para o banho ao longo do tempo necessário para que o regime estacionário seja atingido.
- (e) De outras considerações, sabe-se que durante o processo de resfriamento por imersão o fluxo térmico em $x = +L$ e $x = -L$ decai exponencialmente com o tempo de acordo com a

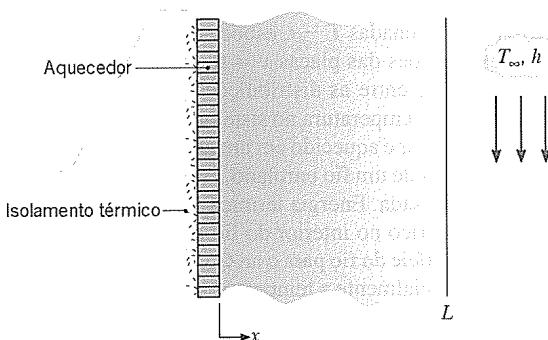
relação, $q'' = A \exp(-Bt)$, onde t está em segundos, $A = 1,80 \times 10^4 \text{ W/m}^2$ e $B = 4,126 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Use essa informação para determinar a energia por unidade de área superficial da placa que é transferida para o fluido durante o processo de resfriamento por imersão.

- 2.46** A parede plana mostrada na figura, com propriedades constantes e sem geração interna de calor, está inicialmente a uma temperatura uniforme T_i . De repente, a superfície em $x = L$ é aquecida por um fluido à temperatura T_∞ , com um coeficiente de transferência de calor por convecção h . A fronteira em $x = 0$ encontra-se perfeitamente isolada.



- Escreva a equação diferencial e identifique as condições inicial e de contorno que podem ser usadas para determinar a temperatura na parede em função da posição e do tempo.
- Em coordenadas $T-x$, esboce as distribuições de temperaturas para as seguintes condições: condição inicial ($t \leq 0$), condição de regime estacionário ($t \rightarrow \infty$), e dois tempos intermediários.
- Em coordenadas q''_x-t , esboce o fluxo térmico nas posições $x = 0$ e $x = L$. Ou seja, mostre qualitativamente como $q''_x(0, t)$ e $q''_x(L, t)$ variam com o tempo.
- Escreva uma expressão para a quantidade total de energia transferida para a parede por unidade de volume da parede (J/m^3).

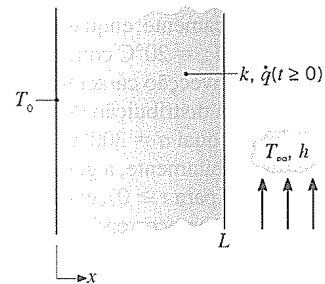
- 2.47** Uma parede plana, com propriedades constantes e sem geração interna de calor, está inicialmente a uma temperatura uniforme T_i . De repente, a superfície em $x = L$ é aquecida pelo contato com um fluido à temperatura T_∞ , com um coeficiente de transferência de calor por convecção h . No mesmo instante, o aquecedor elétrico é energizado, fornecendo um fluxo térmico constante \dot{q}_0 em $x = 0$.



- Em coordenadas $T-x$, esboce as distribuições de temperaturas para as seguintes condições: condição inicial ($t \leq 0$), condição de regime estacionário ($t \rightarrow \infty$), e dois tempos intermediários.
- Em coordenadas q''_x-x , esboce os fluxos térmicos correspondentes às quatro distribuições de temperaturas da parte (a).
- Em coordenadas q''_x-t , esboce os fluxos térmicos nas posições $x = 0$ e $x = L$. Ou seja, mostre qualitativamente como $q''_x(0, t)$ e $q''_x(L, t)$ variam com o tempo.

- Desenvolva uma expressão para a temperatura no regime estacionário da superfície do aquecedor, $T(0, \infty)$, em termos de q''_0, T_∞, k, h e L .

- 2.48** Uma parede plana, com propriedades constantes, está inicialmente a uma temperatura uniforme T_0 . De repente, a superfície em $x = L$ é exposta a um processo convectivo com um fluido a $T_\infty (> T_0)$, com um coeficiente de transferência de calor por convecção h . Também, no mesmo instante, inicia-se na parede um aquecimento volumétrico interno uniforme \dot{q} , que é suficientemente grande para induzir, no regime estacionário, uma temperatura máxima no interior da parede superior à do fluido. A superfície em $x = 0$ permanece à temperatura T_0 .

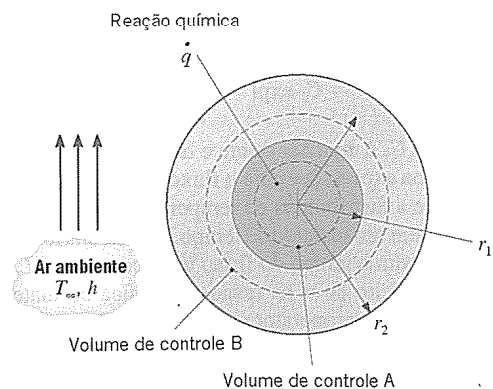


- Em coordenadas $T-x$, esboce as distribuições de temperaturas para as seguintes condições: condição inicial ($t \leq 0$), condição de regime estacionário ($t \rightarrow \infty$), e dois tempos intermediários. Mostre também a distribuição de temperaturas para a condição especial na qual não há fluxo de calor na fronteira em $x = L$.
- Em coordenadas q''_x-t , esboce o fluxo térmico nas posições $x = 0$ e $x = L$, ou seja, $q''_x(0, t)$ e $q''_x(L, t)$, respectivamente.

- 2.49** Considere as condições associadas ao Problema 2.48, mas agora com um processo convectivo no qual $T_\infty < T_0$.

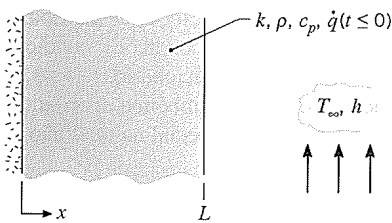
- Em coordenadas $T-x$, esboce as distribuições de temperaturas para as seguintes condições: condição inicial ($t \leq 0$), condição de regime estacionário ($t \rightarrow \infty$), e dois tempos intermediários. Identifique características importantes das distribuições, especialmente a localização da temperatura máxima e o gradiente de temperatura em $x = L$.
- Em coordenadas q''_x-t , esboce o fluxo térmico nas posições $x = 0$ e $x = L$, ou seja, $q''_x(0, t)$ e $q''_x(L, t)$, respectivamente. Identifique características importantes dos históricos dos fluxos.

- 2.50** Em uma partícula esférica de raio r_1 há geração térmica uniforme a uma taxa \dot{q} . A partícula é encapsulada por uma casca esférica com raio externo r_2 que é resfriada pelo ar ambiente. As condutividades térmicas da partícula e da casca são k_1 e k_2 , respectivamente, sendo $k_1 = 2k_2$.



- (a) Aplicando o princípio da conservação de energia no volume de controle esférico A, que é posicionado em uma posição arbitrária no interior da esfera, determine uma relação entre o gradiente de temperatura, dT/dr , e o raio local, r , para $0 \leq r \leq r_1$.
- (b) Aplicando o princípio da conservação de energia no volume de controle esférico B, que é posicionado em uma posição arbitrária no interior da casca esférica, determine uma relação entre o gradiente de temperatura, dT/dr , e o raio local, r , para $r_1 \leq r \leq r_2$.
- (c) Em coordenadas $T - x$, esboce a distribuição de temperaturas em $0 \leq r \leq r_2$.

2.51 Em uma parede plana, de espessura $L = 0,1$ m, há aquecimento volumétrico uniforme a uma taxa \dot{q} . Uma superfície da parede ($x = 0$) é isolada termicamente, enquanto a outra superfície está exposta a um fluido a $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ com o coeficiente de transferência de calor por convecção caracterizado por $h = 1000$ W/(m²·K). Inicialmente, a distribuição de temperaturas na parede é $T(x,0) = a + bx^2$, na qual $a = 300^\circ\text{C}$, $b = -1,0 \times 10^4$ °C/m² e x está em metros. Subitamente, a geração de calor volumétrica é desativada ($\dot{q} = 0$ para $t \geq 0$), enquanto a transferência de calor convectiva continua ocorrendo em $x = L$. As propriedades da parede são $\rho = 7000$ kg/m³, $c_p = 450$ J/(kg·K) e $k = 90$ W/(m·K).



- (a) Determine o valor da taxa de geração de energia volumétrica \dot{q} associada à condição inicial ($t < 0$).
- (b) Em coordenadas $T - x$, esboce as distribuições de temperaturas para as seguintes condições: condição inicial ($t < 0$), condição de regime estacionário ($t \rightarrow \infty$), e duas condições intermediárias.
- (c) Em coordenadas $q''_x - t$, esboce a variação com o tempo do fluxo térmico na fronteira exposta ao processo convectivo, $q''_x(L, t)$. Calcule o valor correspondente do fluxo térmico em $t = 0$, $q''_x(L, 0)$.
- (d) Calcule a quantidade de energia removida da parede, por unidade de área (J/m²), pelo escoamento do fluido durante o resfriamento da parede de sua condição inicial até o regime estacionário.

2.52 Uma parede plana, que tem um de seus lados ($x = 0$) termicamente isolado, está inicialmente a uma temperatura uniforme T_i , quando sua superfície exposta em $x = L$ tem a sua temperatura subitamente elevada para T_s .

- (a) Verifique se a equação a seguir satisfaz à equação do calor e às condições de contorno:

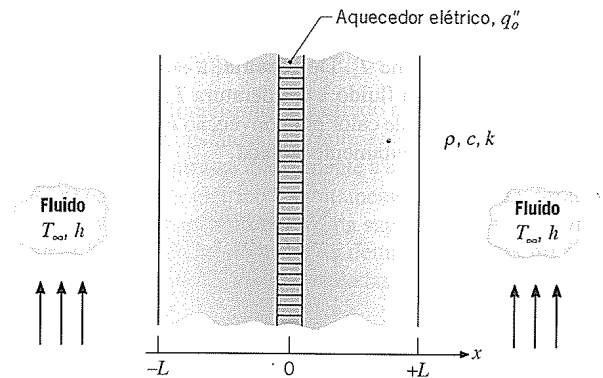
$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = C_1 \exp\left(-\frac{\pi^2 \alpha t}{4 L^2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2 L}\right)$$

na qual C_1 é uma constante e α é a difusividade térmica.

- (b) Obtenha expressões para o fluxo térmico em $x = 0$ e $x = L$.
- (c) Esboce a distribuição de temperaturas $T(x)$ em $t = 0$, em $t \rightarrow \infty$ e em um instante de tempo intermediário. Esboce a variação com o tempo do fluxo térmico em $x = L$, $q''_x(t)$.
- (d) Qual o efeito de α na resposta térmica do material a uma mudança na temperatura da superfície?

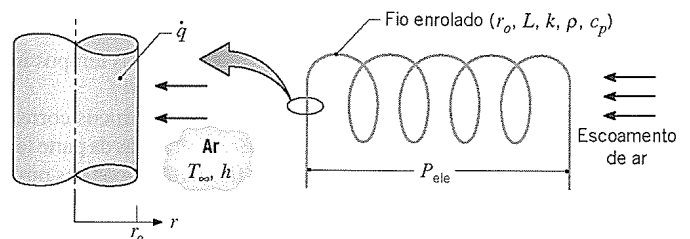
2.53 Um aquecedor elétrico delgado, dissipando 4000 W/m², encontra-se imprensado entre duas placas, com espessura de 25 mm,

cujas superfícies expostas trocam calor por convecção com um fluido a $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ e $h = 400$ W/(m²·K). As propriedades termofísicas do material das placas são $\rho = 2500$ kg/m³, $c = 700$ J/(kg·K) e $k = 5$ W/(m·K).



- (a) Em coordenadas $T - x$, esboce a distribuição de temperaturas no regime estacionário para $-L \leq x \leq +L$. Calcule os valores das temperaturas nas superfícies, $x = \pm L$, e no plano central, $x = 0$. Identifique essa distribuição como Caso 1 e explique suas características marcantes.
- (b) Considere condições nas quais haja uma perda de refrigerante e a existência de uma condição aproximadamente adiabática na superfície $x = +L$. Nas coordenadas $T - x$ usadas na parte (a), esboce a distribuição de temperaturas no regime estacionário correspondente e indique as temperaturas em $x = 0$ e $\pm L$. Identifique essa distribuição como Caso 2 e explique suas características marcantes.
- (c) Com o sistema operando como descrito na parte (b), a superfície $x = -L$ também passa por uma perda súbita de resfriamento. Essa situação perigosa passa despercebida por 15 minutos, quando então a potência do aquecedor é desativada. Considerando a inexistência de perda de calor pelas superfícies das placas, qual é a distribuição de temperaturas nas placas após um longo período de tempo ($t \rightarrow \infty$)? Esta distribuição é uniforme e em estado estacionário. No seu esboço, mostre essa distribuição como Caso 3 e explique suas características marcantes. *Sugestão:* Aplique a exigência de conservação de energia em um intervalo de tempo como base, Equação 1.11b, usando as condições inicial e final correspondendo aos Casos 2 e 3, respectivamente.
- (d) Em coordenadas $T - t$, esboce o histórico da temperatura, nas posições das placas $x = 0$ e $\pm L$, ao longo do período transiente entre as distribuições dos Casos 2 e 3. Onde e quando a temperatura no sistema atinge um valor máximo?

2.54 Tipicamente, ar é aquecido em um secador de cabelos ao ser soprado através de um fio enrolado, através do qual uma corrente elétrica é passada. Energia térmica é gerada pelo aquecimento resistivo elétrico no interior do fio e é transferida por convecção da superfície do fio para o ar. Considere condições nas quais o fio está inicialmente a temperatura do ambiente, T_i , e o aquecimento resistivo é iniciado em conjunto com o escoamento do ar em $t = 0$.



- (a) Para um raio do fio r_0 , uma temperatura do ar T_∞ e um coeficiente convectivo h , escreva a forma da equação do calor e as condições inicial e de contorno que descrevem a resposta térmica transiente, $T(r, t)$, do fio.
- (b) Para um comprimento e um raio do fio de 500 mm e 1 mm, respectivamente, qual é a taxa volumétrica de geração de energia térmica correspondente a um consumo de potência de $P_{\text{ele}} = 500$ W? Qual é o fluxo térmico convectivo em condições de regime estacionário?
- (c) Em coordenadas $T - r$, esboce as distribuições de temperaturas para as seguintes condições: condição inicial ($t \leq 0$), condição de regime estacionário ($t \rightarrow \infty$), e dois tempos intermediários.
- (d) Em coordenadas $q_r'' - t$, esboce a variação do fluxo térmico com o tempo nas posições $r = 0$ e $r = r_0$.