A teoria das proporções de Eudoxo (390-338 a.C.)

(descrita no livro V dos Elementos de Euclides – do início do II século a.C.)

Texto base para o seminário histórico (tema 4) da disciplina

MPM5601 - Elementos de Lógica e Aplicações (2º sem 2023)

Profª Iole de Freitas Druck

Elaborado pelos estudantes:

Murilo Falcirolli Amorin

Estevam Luiz Camillo da Silva

Introdução

Eudoxo de Cnido foi um astrônomo e matemático do século IV a.C. que participou da Academia Platônica de Atenas e tornou-se um dos matemáticos mais importantes da época Helênica. Suas obras, entretanto, foram perdidas, e o conhecimento de seu trabalho é estudado hoje através dos registros de outros matemáticos que o sucederam – em especial, nos Elementos de Euclides (BOYER 1968, p. 126-132). Dentre suas principais contribuições no campo da Matemática estão a teoria das proporções e o Princípio de Eudoxo-Arquimedes (também chamado de Princípio Arquimediano), aplicado no Método da exaustão.

O foco deste trabalho é apresentar a importância histórica da Teoria das Proporções de Eudoxo para o desenvolvimento da Matemática na Grécia Antiga, quando Eudoxo construiu uma definição de proporção que resolveria o impasse trazido pelo paradigma pitagórico. Para isso, apresentaremos: a evolução do pensamento na Grécia antiga; o contexto das diferentes definições e concepções matemáticas à época associadas à teoria das proporções; os obstáculos trazidos pelo paradigma pitagórico; a solução de Eudoxo em si; e suas interpretações atuais.

Pensamento na Grécia Antiga

Conhecer o desenvolvimento do pensamento na Grécia Antiga ajuda a entender o que significou a Teoria das Proporções de Eudoxo. Vamos agora delinear brevemente o contexto filosófico grego que precede Eudoxo segundo MARÍAS (1987; p. 11).

Os gregos começaram a sair do período mítico por volta do século VII a.C.

No mundo que se apresentava aos gregos de então não havia nenhum pensamento formalizado como pré-existente em que pudessem se basear. A condição em que se inicia o pensamento grego é mais pura e radical do que tudo que viria depois na evolução do pensamento chamado de "pensamento ocidental".

Inicialmente, puseram-se a refletir e criar uma explicação para o princípio absoluto (primeiro e último) de tudo que existe, o chamado problema da "Arkhé". Nesse período esses pensadores formaram núcleos de estudos chamados de "Escolas".

Na Escola de Mileto (séc. VII e VI a.C), o princípio de tudo que existe ("Arkhé") foi explicado como sendo coisas determinadas, seres corporais: no início como sendo a água, depois como uma substância ilimitada e, em seguida, como o ar.

Na Escola Pitagórica (séc. VI e V a.C), o princípio de tudo que existe ("Arkhé") foi explicado como sendo os números (os inteiros positivos). Para eles o ser corporal vai coincidir com o ser dos objetos matemáticos.

Na Escola de Eléia (séc.V a.C.), Parmênides cria o conceito de ente. Ele já não versa mais simplesmente sobre as coisas, mas sobre as coisas enquanto são, ou seja, como entes. (MARIAS, 1987; p23). O ente é uno, presente, imóvel, imutável, eterno, percebido pela mente, enquanto a pluralidade e mudança das coisas se dão na sensação.

Os atomistas, influenciados pelos pitagóricos, dividem o ente de Parmênides e chegam a uma parte indivisível: o átomo. Para eles, tudo, inclusive a alma, está composto de átomos. O conhecimento é resultado de átomos que as coisas emanam e, através dos órgãos dos sentidos, chegam à mente.

No séc V a.C. aparecem os sofistas, que se movem no âmbito retórico. Não nos interessa aqui os detalhes de sua atuação.

Sócrates vem no séc. V a.C. Aristóteles refere-se a ele dizendo que lhe devemos duas coisas em suma: “os raciocínios indutivos e a definição universal”, que relacionam-se ao princípio da ciência.

Na Academia de Platão, séc. V e IV a.C., Platão cria o conceito de ideia. Uma ideia é um ente metafísico que encerra o ser absoluto usado para definir o ser “imperfeito” dos entes (as coisas enquanto são). Assim, a ideia é distinta tanto do ente (as coisas enquanto são) quanto da coisa.

> Quando quero dizer algo sobre o cavalo, constato antes de tudo que existem muitos cavalos, em segundo lugar, que os cavalos que agora encontro não são permanentes nem existiam faz cinquenta anos nem existirão dentro de outros cinquenta, por último, quando digo que algum cavalo é preto, não afirmo algo rigorosamente correto, porque ele tem algo de branco ou de cinza, o cavalo perfeito, sem mais nem menos, não existe. Pode-se dizer que quase predicamos, quase propriedades de quase coisas.
>
> Platão, que se dá conta disso - e nisso consiste sua genialidade - supõe - e isso é fundamental - que se trata de um defeito do cavalo, porque este deveria ser um cavalo absoluto e absolutamente preto. Ante essa dificuldade, afasta-se do cavalo concreto, que é e não é, que não é por completo, para buscar o cavalo verdadeiro. E Platão tem de fazer duas coisas: encontrar o cavalo absoluto e a partir dele dar conta dos cavalos aproximados que galopam pelo mundo. Platão parte do mundo das coisas, que não permitem predicações rigorosas, e recorre ao mundo em que estas se dão, que chama de mundo das ideias. (MARÍAS, 1987; p50).

Eudoxo (390-338 a.C.) participou da Academia de Platão, e, assim, teve contato com essa noção do ser das ideias que não se confundia com o versar sobre as coisas enquanto coisas sensíveis da escola Pitagórica. Essa evolução do pensamento grego possivelmente permitiu a Eudoxo olhar com outros olhos para o impasse que surgiu no desenvolvimento matemático de então devido ao paradigma pitagórico.

O Paradigma Pitagórico

Os pitagóricos nutriam sua filosofia com a Matemática, a qual transformaram em uma ciência autônoma e rigorosa.

Os números inteiros positivos eram a resposta dos pitagóricos para o problema da “Arkhé” do universo, ou seja, o princípio de tudo que existe.

Para os pitagóricos os números inteiros positivos não representavam ou simbolizavam as coisas, eles eram a estrutura das coisas (CHAUI, 2002, p.75 apud LORIN, 2009; p51). Em alguns textos os pitagóricos afirmavam que os números eram as próprias coisas (MARIAS, 1987).

> “Da afirmação, bela e fecunda, da existência duma ordenação matemática do Cosmos – todas as coisas têm um número – fez-se esta outra afirmação, bem mais grave e difícil de verificar – as coisas são números” [...] Para legitimar essa afirmação, conceberam a matéria como formada por corpúsculos, aos quais deram o nome de “Mônadas”, de extensão não nula, embora pequena, os quais reunidos em certa quantidade e ordem produziam os corpos; uma mônada era análoga à unidade numérica e, assim, os corpos se formavam por quantidade e arranjo de mônadas como os números se formam por quantidade e arranjo de unidades (CARAÇA, 1984, p.72 apud LORIN, 2009; p.49).
>
> A partir dessas idéias [a dos pitagóricos], os atomistas propõem sua própria cosmologia. A phýsis, como o ser eleata, deverá ser idêntica a si mesma, eterna e imutável, mas, diferentemente dos eleatas, é formadas por unidades discretas, como para os pitagóricos. (CHAUÍ, 2002, p. 121 apud LORIN, 2009; p51)

Conhecimento matemático da época dos pitagóricos

A maioria dos textos originais sobre o conhecimento matemático dos gregos se perderam. Os estudos se baseiam nos escritos de Platão, Aristóteles e Euclides.

> Grande parte do que se conhece sobre a matemática na Grécia Antiga parte de conclusões extraídas de um exame minucioso, por um lado, dos escritos de Platão e Aristóteles, e, por outro, dos Elementos de Euclides. A versão mais popular é que esse livro de Euclides resulta de uma compilação de conhecimentos matemáticos anteriores, ainda que a forma da exposição deva ser característica do tempo e do meio em que ele viveu. Não é possível confirmar essa tese, mas é fato que boa da matemática contida nessa obra associa-se a outros trabalhos gregos. (ROQUE 2012, p. 115)

Números, Grandezas e Magnitudes

Para os gregos, “número” se referia ao que nós chamamos de números naturais sem o zero (ou inteiros positivos); “grandeza” se referia a uma característica física, como comprimento, área, ou volume; e “magnitude” se referia ao tamanho de uma grandeza específica.

Magnitudes e grandezas são ditas do mesmo tipo, de mesmo gênero, ou homogêneas, quando se referem ou somente a comprimentos, ou somente a áreas ou somente a volumes.

Euclides separa o tratamento dos números do tratamento das magnitudes nos *Elementos.*

O conceito de medir

Nos *Elementos* de Euclides, o conceito de medir é muito próximo ao que entendemos por divisibilidade, e pode ser aplicado tanto para números quanto para magnitudes.

> Os Elementos de Euclides - Livro V - Definições (relativas à Magnitude):
>
> 1. Uma magnitude é uma parte de uma magnitude, a menor da maior, quando meça exatamente a maior.
>
> 2. E a maior é um múltiplo da menor, quando seja medida exatamente pela menor.
>
> (EUCLIDES, 2009, p.205)

> Os Elementos de Euclides - Livro VII - Definições (relativas à Número):
>
> 3. Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior.
>
> 4. E partes, quando não meça exatamente.
>
> 5. E o maior é um múltiplo do menor, quando seja medido exatamente pelo menor.
>
> (EUCLIDES, 2009, p.269)

Antifairese

Antifairese - Subtrações Mútuas e Sucessivas

Há menção na literatura de que os pitagóricos ao estudar o monocórdio (instrumento musical de uma corda só presa em dois pontos), para gerar uma vibração que correspondesse a uma oitava, a uma quinta, a uma quarta, etc, tinham de saber que ponto da corda deveriam pressionar. Para determinar esse ponto desenvolveram um algoritmo que deu origem ao método da Antifairese, conforme MARTIN (2000, p. 235-237).

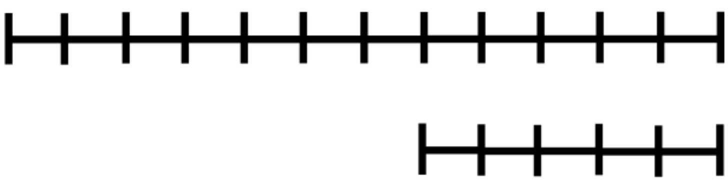
A Antifairese é um algoritmo matemático cujo nome vem do grego e significa “subtração recíproca”, chamado também de subtrações mútuas ou subtrações sucessivas. Vamos apresentar o procedimento para magnitudes (por exemplo, tamanho de segmentos), mas o mesmo se aplica para números.

1) Dadas duas magnitudes (de mesmo tipo), subtraímos a menor da maior até que o resto seja menor que a magnitude menor, e anotamos o número de vezes que a magnitude menor “coube” na maior;
2) Se o resto obtido for não-nulo, ele passa a ser a menor magnitude e a magnitude que antes era a menor passa a ser agora a maior magnitude, e iteramos novamente o procedimento.

Cada iteração gera um número (o quanto “coube”), e ao final das iterações, tem-se uma sequência numérica, que é chamada de *antifairese* das magnitudes iniciais.

> Na álgebra moderna, o procedimento é semelhante ao conhecido como ‘algoritmo de Euclides’ e sua função é encontrar o máximo divisor comum entre dois números. (ROQUE 2012, p.119)

O exemplo a seguir (acesse a hiperligação para o exemplo animado) mostra a antifairese das magnitudes de dois segmentos – medindo 12 e 5 ‘unidades de comprimento’. A sequência numérica resultante é [2,2,2]. A magnitude do segmento que resta ao final da operação mede exatamente as magnitudes dos segmentos iniciais – não coincidentemente, esse segmento restante mede 1 ‘unidade de comprimento’.



Fonte deste gif: Por Proteins - Obra do próprio, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6639790

Antifairese e Paradigma Pitagórico

No paradigma pitagórico, os segmentos seriam formados pela justaposição de um número finito de corpúsculos indivisíveis chamados “mônadas”, e por isso o menor resto não-nulo possível de ser obtido na penúltima iteração do processo de antifairese aplicado a magnitudes de segmentos seria a magnitude da mônada. E, assim, a próxima iteração teria resto nulo, pois a mônada mediria qualquer segmento. Resulta então que toda antifairese seria finita.

Antifairese e Redução da Geometria à Aritmética

Ainda no raciocínio pitagórico, sempre se chegaria a uma magnitude que *mediria* as duas magnitudes iniciais (as dividiria exatamente), mesmo que para tanto precisasse chegar à magnitude congruente à magnitude da mônada. Isso permitiria interpretar a semelhança geométrica em termos de uma proporção numérica

A Comensurabilidade

Diz-se que duas magnitudes (ou números) são comensuráveis se é possível encontrar uma terceira que as *meça* (divide-as exatamente).

Dentro do paradigma pitagórico, qualquer par de magnitudes do mesmo tipo é comensurável, já que ao fim das iterações da antifairese, no máximo, a magnitude que as mediria seria a magnitude da mônada.

Essa noção foi primeiramente compreendida para os números, e depois estendida para as magnitudes.

A razão

Entre os gregos, a relação chamada razão estava presente na teoria musical, na Astronomia e na Matemática. Na Matemática, temos a definição vinda da antifairese e a definição vinda do livro de Euclides.

> Diz-se que duas magnitudes estão na mesma razão quando possuem a mesma antifairese. (ROQUE 2012, p.121)

> Os Elementos de Euclides - Livro V - Definições (relativas à Razão):
>
> > 3. Uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero.
> >
> > 4. Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma à outra.
> >
> > (EUCLIDES, p.205 , 2009)
>
> "..esta é essencialmente uma formulação do chamado "Axioma de Arquimedes", propriedade que Arquimedes mesmo atribuía a Eudoxo. Sendo assim, a ideia de razão de Eudoxo exclui o zero "(Relativo ao item 4 dos Elementos acima descrito, BOYER, 1968; p. 156)

A proporção

No exercício de seus ofícios, os gregos já utilizavam a proporção de uma forma prática: na Arquitetura, na Escultura, na Medicina e na teoria musical.

"Entre os gregos, casos particulares de proporções (média aritmética, geométrica e a proporção áurea) eram familiares desde as épocas dos pitagóricos" (MILES & COELHO 2013, p. 157).

Também havia a definição de que quatro magnitudes seriam proporcionais se a antifairese das primeira e segunda magnitudes fosse igual à antifairese da terceira e da quarta.

Há uma definição de proporção no livro VII de Os Elementos de Euclides atribuída aos Pitagóricos, aplicada somente a números inteiros positivos.

> Os Elementos - Livro VII - Definições (relativas à Número):
>
> > 21. Números estão em proporção, quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes. (EUCLIDES. 2009; p.170)

A noção de infinito

Outra forte característica do pensamento grego em geral é que não se admitia a ideia de que algo pudesse ser infinito ou ser formado por infinitas partes.

Essa limitação era contornada por uma noção do que chamamos hoje de *infinito potencial*, que admitia quantidades e medidas (finitas) tão grandes quanto se quisesse. Por exemplo, admitia-se que os segmentos de reta podiam ser prolongados tanto quanto fosse preciso, e que um algoritmo sempre podia ser iterado mais uma vez.

Surge uma inconsistência no paradigma pitagórico

A Incomensurabilidade de magnitudes

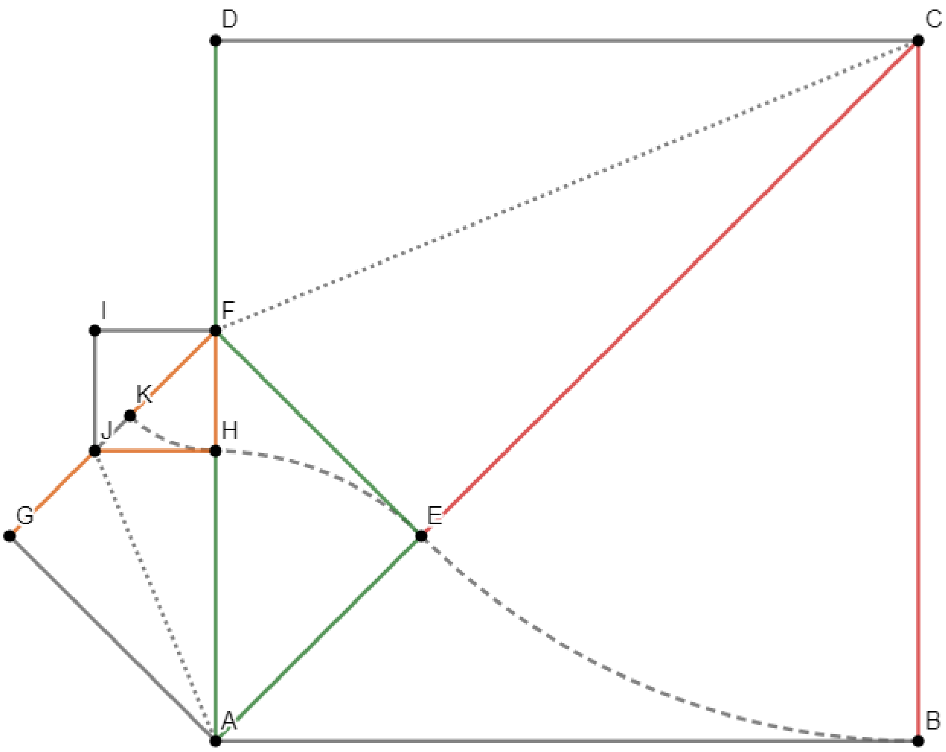
Em certo momento, foi identificado que havia duas magnitudes que não podiam ser medidas por uma terceira, ou seja, descobriu-se um par de magnitudes incomensuráveis.

> Ao buscarem medir grandezas geométricas utilizando dados aritméticos, os pitagóricos, de acordo com Godefroy (1997, p.45) "vão ser os primeiros a fazer a experiência de como pode ser delicado [...] exprimir o contínuo com a ajuda do discreto". Especificamente, a anomalia começou com as tentativas de se determinar a medida da diagonal de um quadrado, utilizando dados aritméticos, decorrentes do Teorema de Pitágoras. (GODEFROY 1997, p.45 apud LORIN 2009, p.62)

Antifairese Infinita

Para ilustrar, mostraremos agora o processo de antifairese entre o lado e a diagonal de um quadrado.

Na figura a seguir, o quadrado ABCD é um quadrado genérico, e os segmentos coloridos com a mesma cor são congruentes.



Construção geométrica	Processo da antifairese
Tomemos o quadrado ABCD	
Tomemos seu lado e sua diagonal	Vamos relacionar seu lado e sua diagonal[1]
Vemos que o lado do quadrado “cabe uma vez” na sua diagonal.	O lado do quadrado é menor que sua diagonal. Subtraímos o menor do maior **uma vez** e obtemos o resto AE (menor que o lado do quadrado).
Tomemos o resto AE e construamos o quadrado AEFG que tenha AE como lado.	Vamos relacionar seu lado (o resto AE) com o lado do quadrado ABCD (a magnitude menor na iteração anterior)
Construindo o quadrado AEFG, temos que AE e EF são congruentes e F pertence ao segmento AD. Como os triângulos CEF e CDF são congruentes, segue que DF é congruente a AE. Sendo H o ponto na diagonal AF tal que AH é congruente a AE, temos que AE “cabe duas vezes” no lado AD do quadrado maior.	Subtraímos o segmento AE do lado do quadrado ABCD **duas vezes** e obtemos o resto FH (menor que AE).
	E reiteramos o processo.
Tomemos o resto FH e construamos o quadrado FHIJ, tendo FH como lado.	Vamos relacionar seu lado (o resto FH) com o lado FG do quadrado AEFG (a magnitude menor na iteração anterior)
* * *	* * *

[1] Para sermos coerentes com o restante do texto, deveríamos dizer que estamos relacionando as *magnitudes* do lado e da diagonal do quadrado, mas não o faremos para simplificar a redação.

Esse processo pode continuar indefinidamente (veja figura abaixo), e para cada reiteração do processo da antifairese obtém-se o número 2. Segue que a antifairese produzida com o lado e a diagonal do quadrado é [1, 2, 2, 2, …], para qualquer que seja o quadrado inicial, ou seja, uma sequência infinita.

> Não se sabe ao certo em que exemplo a incomensurabilidade entre duas grandezas foi verificada pela primeira vez e parece improvável que o método da antifairese tenha sido o responsável por essa descoberta. (ROQUE, 2012 - p. 121)[2]
>
> Essa definição seria difícil de utilizar (estritamente falando, impossível, ao dar lugar a um processo indefinido), e assim o descobrimento por Eudoxo da teoria das proporções que se utiliza no Livro V dos *Elementos* de Euclides foi um êxito brilhante.(BOYER 1968)

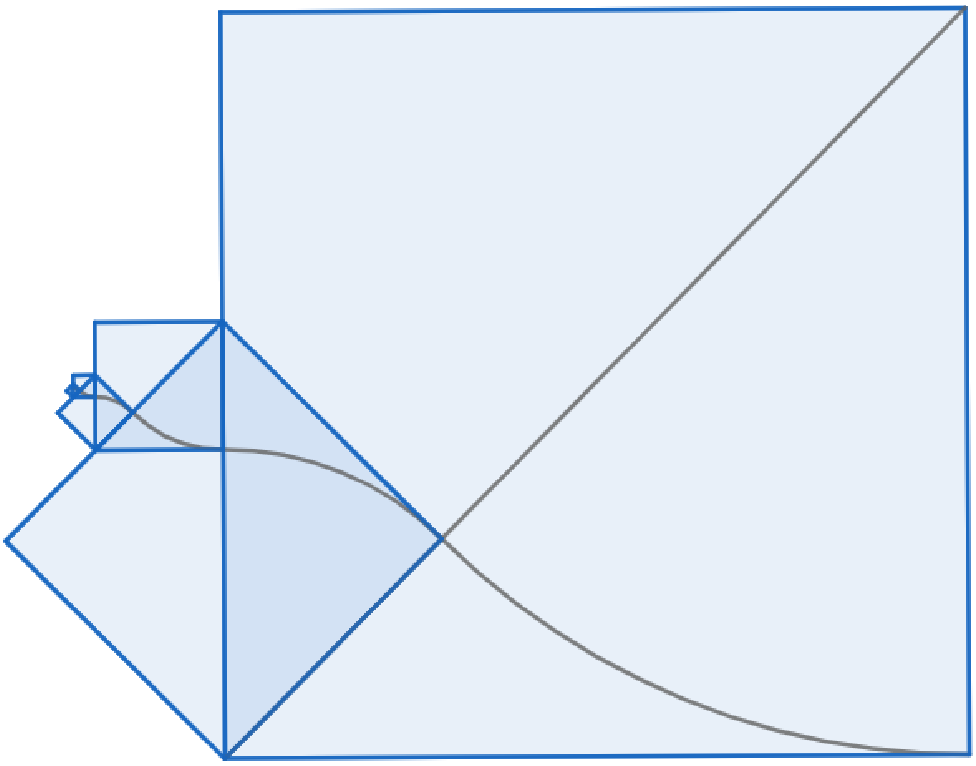


Figura que ilustra a antifairese infinita discutida acima.

[2] ROQUE (2012) usa o termo grandezas; aqui estamos usando o termo magnitudes.

Controvérsias sobre a existência ou não de crise dos incomensuráveis

Há controvérsias entre os autores a respeito de se existiu ou não uma crise em razão da descoberta dos incomensuráveis.

Apesar de poder haver duas perspectivas, uma com relação ao paradigma pitagórico e outra com relação ao desenvolvimento da matemática, nem sempre isso é mencionado ao tratar do assunto.

Para entender mais sobre essas controvérsias, sugerimos a leitura do seguinte material:

- O artigo de GONÇALVES e POSSANI (2009), onde eles apresentam cada uma das versões sobre a descoberta da incomensurabilidade e uma possível crise no meio pitagórico em decorrência dela. E, assim, defendem que não houve uma crise.

  > No caso da história da incomensurabilidade, o rigor historiográfico mais aceito atualmente entre os historiadores indica que uma versão da história sem a crise de fundamentos entre pitagóricos é a mais compatível com as fontes.(GONÇALVES; POSSANI, 2019; p.23)

- A dissertação de mestrado de LORIN (2009), cujo principal objetivo foi identificar se a descoberta das medidas incomensuráveis causou ruptura no desenvolvimento da ciência matemática. Acaba por concluir, dentre outras coisas, que:

  > Com a descoberta da existência de medidas incomensuráveis um forte abalo no paradigma pitagórico foi sentido, causando uma crise na matemática pitagórica. Esta crise foi estabelecida principalmente pela insuficiência da matemática pitagórica em resolver a anomalia evidenciada por sua maior realização matemática: o Teorema de Pitágoras. (LORIN, 2019; p.91)

Solução de Eudoxo

Teoria das Proporções de Eudoxo

Podemos encontrar nas Definições 5 e 6 do Livro V dos Elementos de Euclides a seguinte definição de proporcionalidade, atribuída a Eudoxo:

> 5. Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes.
>
> 6. E as magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção. (EUCLIDES, p.205, 2009)

Na linguagem matemática contemporânea, podemos dizer que os valores *A, B, C* e *D* reais estão em proporção se, para todo *n* e *m* inteiros positivos, verificam-se as seguintes afirmações[3]:

- se $nA > mB$, então $nC > mD$
- se $nA = mB$, então $nC = mD$
- se $nA < mB$, então $nC < mD$

Veja que essa definição se apóia apenas na noção básica de comparação de magnitudes (relação de ordem), tornando irrelevante a noção de comensurabilidade. Pode-se considerar também que as magnitudes não sejam todas de mesmo tipo. Basta que *A* e *B* sejam do mesmo tipo, e *C* e *D* sejam do mesmo tipo. *A* e *B* podem ser, por exemplo, os comprimentos de dois segmentos incomensuráveis, e *C* e *D,* as áreas de duas circunferências cujos diâmetros tenham comprimentos iguais às raízes quadradas de *A* e *B,* respectivamente.

Ao contrário do caso comensurável, a proporção de magnitudes incomensuráveis sempre “toca", de alguma maneira, o infinito, e por isso é mais difícil de definir. Para nós, a genialidade da definição de Eudoxo está no uso astuto dos quantificadores “para todo *n* e para todo *m*”, que dão conta de “alcançar a infinitude” necessária para os casos incomensuráveis, e ainda manter a simplicidade conceitual de uma definição que se apoia apenas nas relações “maior, menor ou igual”.

Resgate da proporção

Tendo a Teoria das Proporções de Eudoxo conseguido abranger os incomensuráveis viabilizou a continuidade de demonstrações que necessitavam de recorrer à ideia de proporcionalidade.

> Uma vez desenvolvida a teoria de proporções no Livro V, Euclides a utiliza no Livro VI para demonstrar teoremas relativos a razões e proporções que se apresentam ao estudar triângulos, paralelogramos e outros polígonos semelhantes. (BOYER 1968, p. 156)

[3] A rigor, a segunda afirmação não é necessária para garantir que $A/B = C/D$.

Interpretação moderna

Teoria das proporções de Eudoxo

Atualmente, uma fração em que numerador e denominador sejam números reais positivos é interpretada, também, como um número real positivo: a fração representa uma divisão, que tem um “resultado” no conjunto dos números reais.

> Entre os gregos, casos particulares de proporções (média aritmética, geométrica e a proporção áurea) eram familiares desde as épocas dos pitagóricos e, no livro V dos *Elementos* de Euclides, achamos a Teoria das Proporções de Eudoxo de Cnido (aprox. 408 a 355 a.C.) que não-somente sugere a definição atual de igualdade de frações (a/b=c/d se e somente se ad=bc), como é muito próxima às definições de número real surgidas no século passado. (MILES & COELHO 2013, p. 157)

Vamos agora realizar algumas manipulações para melhor interpretar a definição de razão fornecida no Livro V dos *Elementos*, que é equivalente à compreensão atual de igualdade de razões.

Sejam *A, B, C* e *D* magnitudes quaisquer, em que *A* e *B* são magnitudes de um tipo, e *C* e *D* podem ser de um tipo diferente. Numa interpretação contemporânea, como não fazemos distinção entre os “tipos das magnitudes”, bastaria dizer que *A, B, C* e *D* são números reais positivos quaisquer.

Estudaremos a seguinte equivalência, que traduz para a interpretação matemática atual a definição de igualdade de razões proposta nos *Elementos*:

$$\left[\left(mA < nB \leftrightarrow mC < nD\right), \forall m, n \in \mathbb{N}\right] \longleftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Note que

$$\left[\left(mA < nB \leftrightarrow mC < nD\right), \forall m, n \in \mathbb{N}\right] \longleftrightarrow \left[\left(\frac{A}{B} < q \leftrightarrow \frac{C}{D} < q\right), \forall q \in \mathbb{Q}_+\right]$$

Então, substituindo *A/B* por *x*, e *C/D* por *y* (sendo *x* e *y* números reais positivos), temos

$$\left[\left(x < q \leftrightarrow y < q\right), \forall q \in \mathbb{Q}_+\right] \longleftrightarrow x = y$$

Veja que essa equivalência se aproxima muito da definição de igualdade de números reais a partir dos cortes de Dedekind, e pode ser demonstrada utilizando o fato de que o conjunto dos números racionais é denso no conjunto dos números reais.

Antifairese infinita

Veremos que a antifairese infinita pode ser interpretada como uma fração contínua.

Sejam x_1 e x_2 duas magnitudes de mesmo tipo (números reais positivos), com $x_2 < x_1$, e seja $[q_1 , q_2 , \ldots , q_n , \ldots]$ a antifairese infinita (sequência de números naturais) obtida no processo de subtrações sucessivas a partir de x_1 e x_2. Vamos considerar também a sequência (x_n) tal que $x_n = q_n . x_{n+1} + x_{n+2}$, onde, para todo *n* natural, $x_{n+1} < x_n$.

Veja que

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{q_1 \cdot x_2 + x_3}{x_2} = q_1 + \frac{x_3}{x_2} = q_1 + \frac{1}{\frac{x2}{x3}}$$

E, em geral,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{q_n \cdot x_{n+1} + x_{n+2}}{x_{n+1}} = q_n + \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = q_n + \frac{1}{\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}}$$

Construímos assim a seguinte fração contínua:

$$\frac{x_1}{x_2} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{q_5 + \cdots}}}}$$

Hoje podemos dizer que essa fração contínua é igual a um (único) número real (positivo), e assim interpretamos, com a Matemática atual, por que a antifairese infinita de fato define a razão entre x_1 e x_2.

Considerações finais

Entendemos que a mudança de pensamento ao longo da história da Grécia Antiga, passando do paradigma pitagórico da estreita correlação entre número e coisas para a criação da "ideia" por Platão, possibilitou a nova concepção sobre as proporções que Eudoxo desenvolveu.

Sua concepção foi tal, que permanece válida e se aproxima dos cortes de Dedekind.

Será que poderia ser pensada como uma Sequência de Cauchy? Resta analisar.

Referências

BONGIOVANNI, V. “**As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método de exaustão,** in UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, junho 2005, no 2, pp 91-110.

BOYER, Carl B. **Historia de la Matemática** ; tradução em castelhano do original: A History of Mathematics (1968) - Ed. cast. Alianza Editorial, S.A. Madrid - 2ª ed 1987- ISBN 84-206-8094-X

EUCLIDES - **Os Elementos**; tradução do grego e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009; ISBN 978-85-7139-935-8

GONÇALVES, Carlos H. B., POSSANI, Claudio. **Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga**. Matemática Universitária n°47. p.16-24. dezembro de 2009.

LORIN, João Henrique. **Uma Revolução científica na Matemática: do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano** - Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá - Aprovada em 15 de julho de 2009.

MARÍAS, Julián. **História da Filosofia.** 8ª Ed. Trad. Alexandre Pinheiro Torres. Porto: Edições Sousa & Almeida Ltda, 1987.

MARTIN, Carlos Medeiros. I.B Viera y Clavijo La Laguna - Publicación “**Ciencia y Cultura en la Grecia Antigua, Clásica e Helenística Acts años VI y VII**” - Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciência - artigo de 1998, publicação em setembro 2000 - ISBN 84-699-2928-3
https://fundacionorotava.org/publicaciones/actas-del-seminario-orotava-de-historia-de-la-cien/ciencia-cultura-grecia-antigua-clasica-helenistica/

MILES & COELHO. **Números : Uma Introdução à Matemática** / Francisco César Polcino Miles, Sônia Pitta Coelho - 3ªed. 3ª reimpr. - São Paulo - Editora da Universidade de São Paulo , 2013 - ISBN 978-85-314-0458-0

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas,** Zahar, 2012.