PNV 5856

METODOLOGIA DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

AULA 9

.

Prof. Helio Mitio Morishita

2023

PNV5856
METODOLOGIA DE CONTROLE NO ESAPAÇO DE ESTADO

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

PROCESSOS ALEATÓRIOS

Até o presente momento admitiu-se que os sistemas eram determinísticos, isto é, dado uma entrada conhecida, o sinal de saída poderia ser conhecida precisamente, sem erros. E quando consideramos variáveis exógenas, admitidos que eram "determinísticos". No entanto, isto é irreal, pois os próprios processos sofrem perturbações de natureza aleatória, bem como os sinais dos sensores que são corrompidos pelos ruídos. Desta forma, para incorporar estes processos aleatórios na dinâmica do sistema, serão consideradas se seguintes equações no espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fv \tag{1}$$

$$y = Cx + w \tag{2}$$

onde v e w são processos aleatórios.

Observe que neste caso, como as perturbações e os erros de medição são processos estocásticos, a saída do sistema também será um processo estocástico.

Modelo conceitual de processos aleatórios

Admita que, para cada instante t, existam N medições de algum processo aleatório. Para este caso as seguintes definições estatísticas empíricas podem ser aplicadas:

Média

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t) \tag{3}$$

Média quadrática

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2(t) \tag{4}$$

Variância

$$v(t) = \overline{x^2(t)} - [\bar{x}(t)]^2 \tag{5}$$

Função de correlação

$$r(t,\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} xi(t)x_i(\tau) \tag{6}$$

Características estatísticas de processos aleatórios

Sob o ponto de vista teórico, as propriedades estatísticas dos processos aleatórios são definidas a partir da função de densidade de probabilidade conjunta (probability density function - pdf) que é expressa, por exemplo, como:

$pdf\,[x;t]$

$pdf\,[x_1,x_2;t_1,t_2]$

$pdf\,[x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3]$

Esta função é útil para determinar a probabilidade de obter x em algun instante. Como exemplo tem-se:

$$\begin{aligned} pdf\,[x_1,x_2,x_3;t_1,t_2]\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3 = Prob[&x_1 < x(t_1) < x_1+\Delta x_1, \\ &x_2 < x(t_2) < x_2+\Delta x_2, x_3 < x(t_3) < x_3+\Delta x_3] \end{aligned} \tag{7}$$

Os parâmetros estatísticos decorrentes do *pdf* são:

- Média

$$\mu(t) = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x pdf[x, t] dx \tag{8}$$

- Média quadrática

$$E\{x^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 pdf[x, t] dx \tag{9}$$

- Variância

$$\sigma^2 = E\{[x(t) - \mu(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu(t)]^2 pdf[x, t] dt \tag{10}$$

- Função de correlação

$$\rho(t, \tau) = E\{x(t)x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 pdf[x_1, x_2; t, \tau] dx_1 dx_2 \tag{11}$$

As Eqs. (8) a (11) podem ser aplicados a um vetor de processos. Seja

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{12}$$

A média então é dada por:

$$\mu(t) = E\{x(t)\} = \begin{bmatrix} E\{x_1(t)\} \\ . \\ . \\ E\{x_n(t)\} \end{bmatrix} \tag{13}$$

A função de correlação, por sua vez, pode ser estendida para matriz de correlação:

$$R(t,\tau) = E\{x(t)x^T(\tau)\} = \begin{bmatrix} E\{x_1(t)x_1(\tau)\} & . & . & E\{x_1(t)x_n(\tau)\} \\ . & . & . & . \\ E\{x_n(t)x_1(\tau)\} & . & . & E\{x_n(t)x_n(\tau)\} \end{bmatrix} \tag{14}$$

A função de correlação, por sua vez, pode ser estendida para matriz de correlação:

$$R(t,\tau) = E\{x(t)x^T(\tau)\} = \begin{bmatrix} E\{x_1(t)x_1(\tau)\} & . & . & E\{x_1(t)x_n(\tau)\} \\ . & . & . & . \\ E\{x_n(t)x_1(\tau)\} & . & . & E\{x_n(t)x_n(\tau)\} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Os elementos da diagonal principal da matriz de correlação são as funções de auto-correlação de $x_i(t)$ com $x_i(\tau)$. Obviamente, pode-se perceber facilmente a partir da Eq. (14) que

$$R(t,\tau) = R^T(\tau,t) \tag{15}$$

E para um caso especial tem-se:

$$R(t,t) = E\{x(t)x^T(t)\} = R^T(t,t) \tag{16}$$

A matriz $R(t,t)$ é chamada de matriz de covariância do vetor de processo $x(t)$. Eventualmente esta matriz pode conter somente os termos da diagonal principal. Neste caso, tem-se $E\{x_i(t)x_j(\tau)\} = 0$

In all of the foregoing analysis, statistics were defined by averaging over the ensemble of members (sample functions) of the random process. Often it is not possible to get such statistics. If we wanted meteorological statistics for, say, New York we would have to conceive of an ensemble of infinitely many New Yorks and accumulate averages over this ensemble. But there is only one New York, so this experiment is inconceivable. Averages over time, however, can be obtained. We can get the average temperature of New York on January first at, say, 2 p.m. by measuring the temperature each January first at 2 p.m. for many years and calculating the average. How does an average of this type relate to an ensemble average? In general, there is no relationship. But, in a special subset of stationary processes, these time averages are the same as the ensemble averages. Such processes are called "ergodic." As with many other statistical properties, there is no practical way of verifying that a stationary process is ergodic. So, by another leap of faith, when it suits our needs, we assume that a process is ergodic. If a process is ergodic, a single sample function is representative of the ensemble. To get the ensemble statistics for the outputs for 10^6 radios tuned to no station, we can take time averages of the output of one radio!

Processos estacionários e ergódicos

Em geral as funções de densidade de probabilidade são funções do tempo. No entanto, se a função for invariante com a translação no tempo, isto é:

$$pdf[x; t + \tau] = pdf[x; t]$$
$$pdf[x_1, x_2; t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2] = pdf[x_1, x_2; t_1, t_2]$$

para qualquer τ o processo é chamado de estacionário.

Uma outra hipótese normalmente adotada é que a médias das amostras coincide com a média ao longo do tempo de uma única amostra e ela é estacionária. Processos deste tipo são chamados de ergódicos. Para este tipo de função a sua média, variância e a função de correlação podem ser calculadas como:

Média

$$\mu(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

Variância

$$\sigma^2(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \mu(t)]^2 dt$$

Função de correlação

$$\rho(\tau) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

Função densidade espectral de potência

A função densidade espectral de potência é definida como sendo a transformada de Fourier da função de correlação:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{17}$$

Admita agora que $x(t)$ seja corrente ou tensão elétrica. Neste caso a potência média entregue a um resistor é proporcional ao valor quadrático médio de $x(t)$, isto é:

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2)} x^2(t) dt \tag{18}$$

Como $x(t)$ pode não ter a transformada de Fourier, define-se a função truncada, isto é:

$$X_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \tag{19}$$

A transformada de Fourier de $X_T(t)$ é dada por:

$$X_T(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{20}$$

A transformada de Fourier de $X_T(t)$ é dada por:

$$X_T(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{20}$$

Com isso tem-se:

$$|X_T(j\omega)|^2 = \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega t}dt \right|^2 \tag{21}$$

Ou

$$\begin{aligned} |X_T(j\omega)|^2 &= X_T(j\omega)X_T(-j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega t}dt \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)e^{j\omega t}d\tau \\ &= \int_{-T/2}^{t/2} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}dtd\tau \end{aligned} \tag{22}$$

Inserindo a mudança de variável $\lambda = t - \tau$ na Eq. (22) tem-se:

$$\frac{1}{T}|X_T(j\omega|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \frac{1}{T} \int_{\lambda-T/2}^{\lambda+T/2} x(\tau+\lambda)x(\tau)d\tau \right\} e^{-j\omega\lambda}d\lambda \tag{23}$$

Inserindo a mudança de variável $\lambda = t - \tau$ na Eq. (22) tem-se:

$$\frac{1}{T}|X_T(j\omega|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \frac{1}{T} \int_{\lambda - T/2}^{\lambda + T/2} x(\tau + \lambda)x(\tau)d\tau \right\} e^{-j\omega\lambda} d\lambda \tag{23}$$

Para um processo ergódico tem-se:

$$\rho(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\lambda - T/2}^{\lambda + T/2} x(\tau + \lambda)x(\tau)d\tau \tag{24}$$

Com isso tem-se que:

$$\lim_{T\to\infty} |X_T(jw)|^2 = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \rho_T(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda = S(\omega) \tag{25}$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{17}$$

A Eq. 17 mostra que a função de correlação é a transformada de Fourier inversa, isto é,

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \tag{26}$$

Para $\tau = 0$ obtem-se:

$$\rho(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \tag{27}$$

Mas, ao mesmo tempo, tem-se:

$$\rho(0) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

que é a média quadrática do sinal de x. Ou seja, a área sob a densidade espectral de potência é 2π vezes o valor médio quadrático do processo aleatório.

Ruído branco

O ruído branco se caracteriza por ter média nula e espectro de potência constante, isto é:

$$S(\omega) = W$$

com W constante para todas frequências. Neste caso a função de correlação é dada por:

$$\rho(\tau) = W\delta(\tau)$$

onde δ é a "função" delta de Dirac.

Foi visto que $\rho(0)$ é a média quadrática do sinal. Mas como este valor é obtido através da integral do espectro, como mostrada na Eq. (26), e este é constante ao longo de todas as frequências tem-se que o seu valor é infinito:

$$\rho(0) = \lim_{\tau \to 0} \rho(\tau) = \infty$$

Obviamente, não existe este tipo de sinal de natureza, e ruído branco é uma abstração matemática. Mas ela é usada porque agrega uma série de vantagens matemáticas porque o seu espectro é constante ao longo de todas as frequências.

Para $\tau = 0$ obtem-se:

$$\rho(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \tag{26}$$

Resposta de um sistema linear a um ruído branco

Considere a resposta de um sistema multivariável linear e causal com entrada $u(t)$ e resposta $y(t)$. A relação entre as duas variáveis é dada por:

$$y(t) = \int_0^t H(t, \lambda)u(\lambda)d\lambda$$

onde $H(t, \lambda)$ é a resposta matricial do sistema a um impulso.

A matriz de correlação para a saída $y(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} R_y(t, \tau) &= E\{y(t)y^T(\tau)\} &= E\{\int_0^t H(t, \lambda)u(\lambda)d\lambda \int_0^\tau u^T(\xi)H^T(\tau, \xi)d\xi\} \\ & &= E\{\int_0^t \int_0^\tau H(t, \lambda)u(\lambda)u^T(\xi)H^T(\tau, \xi)d\lambda d\xi\} \end{aligned}$$

Lembrando que a entrada é ruido branco tem-se:

$$E\{u(\lambda)u^T(\xi)\} = Q\delta(\lambda - \xi)$$

onde Q é uma constante. Admitindo que o processo é invariante com o tempo e que ele atinge um estado estacionáro para $t \to \infty$ e trocando τ por $t + \tau$:

$$\lim_{t \to \infty} R_y(t, t + \tau) = \overline{R}_y(\tau) = \int_0^\infty H(\xi)QH^T(\xi + \tau)d\xi \qquad (28)$$

O valor médio da saída por ser calculada como:

$$E\{y(t)\} = E\Big\{\int_0^t H(t,\lambda)u(\lambda)d\lambda\Big\} = \int_0^t H(t,\lambda)E\{u(\lambda)\}d\lambda$$

Como $E\{u(t)\} = 0$ tem-se $E\{y(t)\} = 0$

O espectro do sinal de saída é dado por:

$$S_y(\omega) = \int_0^\infty \Big[\int_0^\infty H(\xi)QH^T(\xi+\tau)d\xi\Big]e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (29)$$

A partir da Eq. (29) e lembrando que $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ pode-se mostrar que:

$$S_y(\omega) = H(-j\omega)QH^T(j\omega) \qquad (30)$$

O valor médio da saída por ser calculada como:

$$E\{y(t)\} = E\Big\{\int_0^t H(t,\lambda)u(\lambda)d\lambda\Big\} = \int_0^t H(t,\lambda)E\{u(\lambda)\}d\lambda$$

Como $E\{u(t)\} = 0$ tem-se $E\{y(t)\} = 0$

O espectro do sinal de saída é dado por:

$$S_y(\omega) = \int_0^\infty \Big[\int_0^\infty H(\xi)QH^T(\xi+\tau)d\xi\Big]e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{29}$$

A partir da Eq. (29) e lembrando que $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ pode-se mostrar que:

$$S_y(\omega) = H(-j\omega)QH^T(j\omega) \tag{30}$$

Relação entre os espectros dos sinais de saída e de entrada

Considere um sistema linear, causal, invariante com o tempo e escalar, isto é, uma entrada e uma saída. A função de transferência do sistema é $H(S)$ e, $X(s)$ e $Y(S)$ são, respectivamente, as transformadas de Laplace dos sinais de entrada e de saída. Neste caso, admitindo $s = j\omega$ obtem-se:

$$|Y(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 |X(j\omega|^2 \qquad (31)$$

Considerando a Eq. (25) conclui-se que:

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega) \qquad (32)$$

Fatoração espectral

A Eq. (30) sugere que, se o espectro de um sinal for conhecido, pode-se tentar reproduzi-lo através da alimentação de um sistema linear com ruído branco. Obviamente, o espectro do seu sisnal de saída deverá ser igual ao espectro dado. Na seção 10.6 do livro-texto está discutido e apresentado um procedimento para efetuar a fatoração espectral. Ou seja, dado um espectro $S(\omega)$ obter uma função de transferência $H(s)$ (no caso escalar) tal que:

$$S(\omega) = H(-j\omega)QH(+j\omega) \tag{33}$$

onde Q é uma constante.

$$S_y(\omega) = H(-j\omega)QH^T(j\omega) \tag{30}$$

Neste texto será mostrada a aplicação deste conceito em um caso particular envolvendo sistemas oceânicos.

Considere que o mar é caracterizado pelo seu espectro $S_w(\omega)$. A idéia é obter uma função de transferência $H(s)$ tal que ao ser alimentado por um ruído branco reproduza a altura de onda cujo espectro seja $S_w(\omega)$. Ou seja,

$$y(s) = H(s)w(s) \tag{34}$$

Onde $w(s)$ é a transformada de Laplace do ruído branco Gaussiano de média zero e com densidade espectral valendo $S_w = 1$
Desta forma, o espectro do sinal de saída é dado por:

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_w = |H(j\omega)|^2 \tag{35}$$

O que se deseja é obter $H(s)$ tal que:

$$|H(j\omega)|^2 = S_y(\omega) \tag{36}$$

Exemplo

Como exemplo, considere o espectro de onda conhecido como Pierson-Moskowitz Modificado, que é dado por:

$$S(\omega) = A\omega^{-5}e^{-B\omega^{-4}} \tag{37}$$

onde

$$A = \frac{4\pi^3 H_s^2}{T_z^4}, \qquad B = \frac{16\pi^3}{T_z^4}, \quad T_z = 0.71T_p \tag{38}$$

Os dados considerados foram: $T_p = 10s$ e $H_s = 5,4m$

Uma função de transferência sugerida em Fossen (2011) (ver apresentação do curso) é:

$$H(s) = \frac{K_w s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{39}$$

onde ζ é um coeficiente de amortecimento, ω_0 é a frequência dominante da onda e K_w é a variável que depende da intensidade da onda.

$$H(s) = \frac{K_w s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{39}$$

onde ζ é um coeficiente de amortecimento, ω_0 é a frequência dominante da onda e K_w é a variável que depende da intensidade da onda.

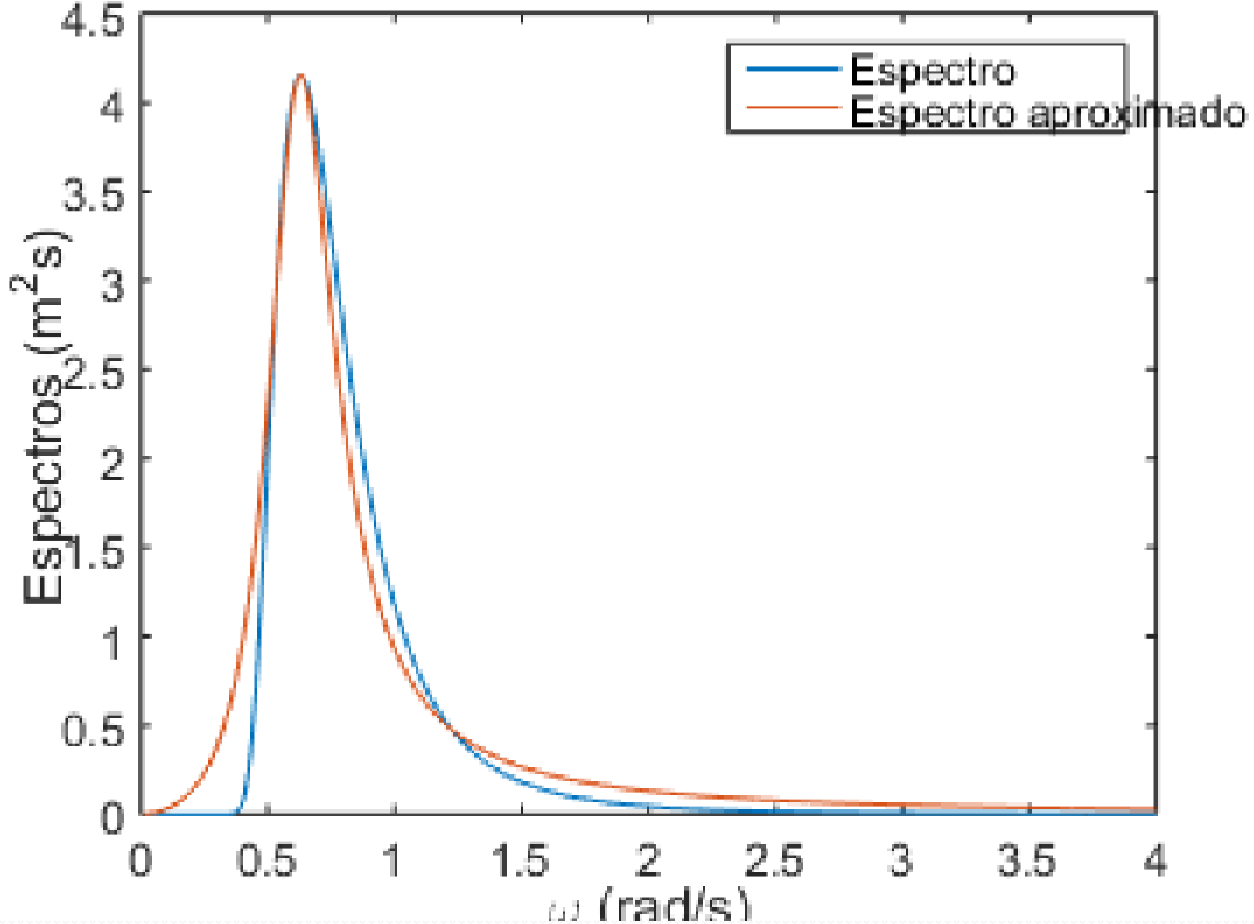
Os dados adotados para esta função foram:

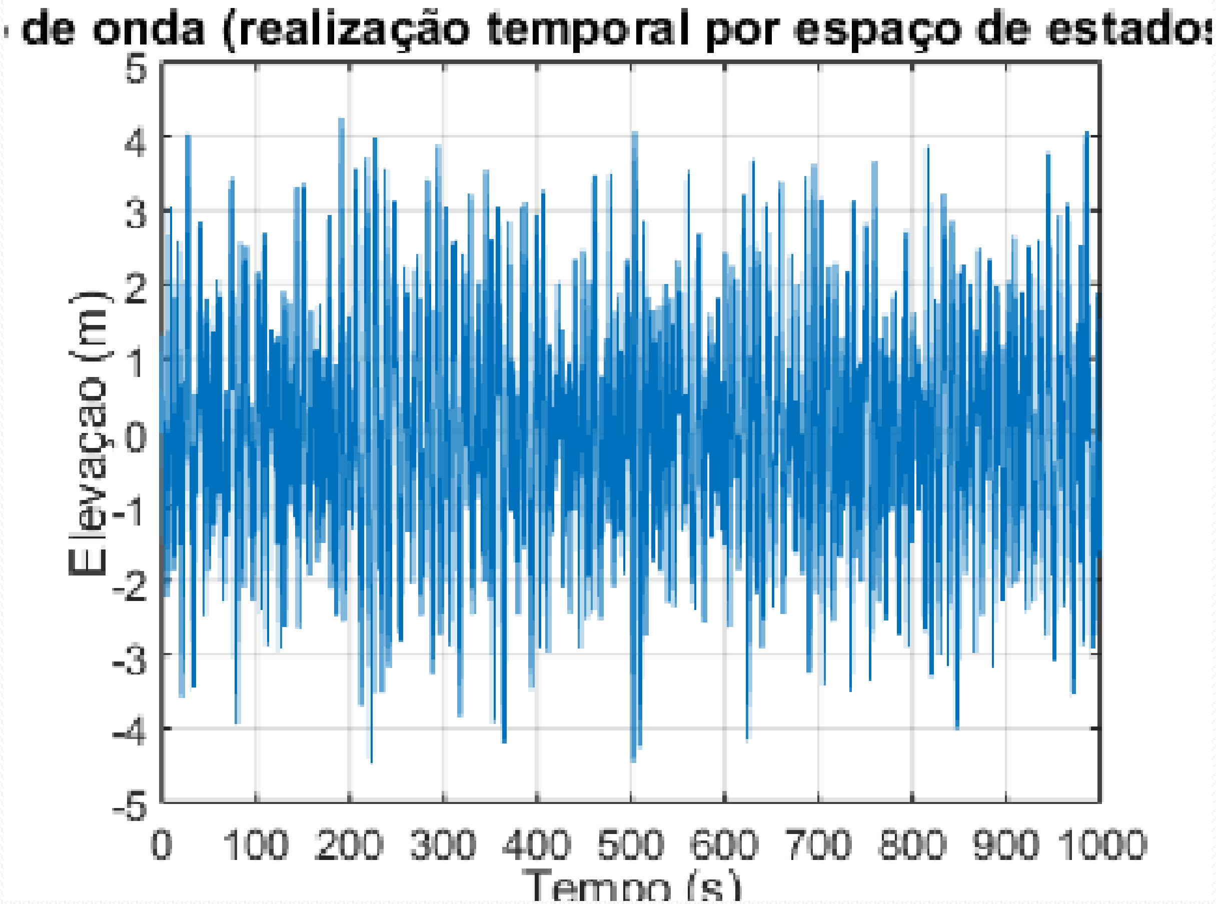
$$K_w = 0,65, \quad \omega_0 = 0,6283 rad/s \quad \text{e} \quad \zeta = 0,2577$$

As equações de estado referente à Eq. (39) são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_w \end{bmatrix} w \tag{40}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$


Espectro
Espectro aproximado
Espectros (m^2s)
ω (rad/s)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5


de onda (realização temporal por espaço de estados
Elevação (m)
Tempo (s)
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

Sistemas com representação no espaço de estados com ruído branco

Considere as seguintes equações no espaço de estado:

$$\dot{x} = Ax + Fv \tag{42}$$

$$y = Cx \tag{43}$$

onde v é um ruído branco.

A idéia é estudar o impacto na saída quando há um ruído na equação de estado.

Considerando a matriz de transição a resposta da Eq. 42 é dada por:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \lambda)F(\lambda)v(\lambda)d\lambda \tag{44}$$

A partir da correlação $R_x(t,\tau) = E\{x(t)x^T(\tau)\}$ obtém-se que (ver livro texto)

$$R_x(t,\tau) = P(t)\Phi^T(\tau,t)$$

para $\tau \geq t$ e onde $P(t)$ é a matriz de covariância do estado $x(t)$ no instante t e é obtida como:

$$P(t) = R_x(t,t) = \Phi(t,t_0)P(t_0)\Phi^T(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\lambda)F(\lambda)Q_v F^T(\lambda)\Phi^T(t,\lambda)d\lambda \tag{45}$$

É interessante obter a evolução da matriz P ao longo do tempo. Para isto, pode-se valer, inicialmente, da Eqs. 9.17 do livro texto mostrada abaixo e que foi obtida no capítulo referente ao controle ótimo:

$$M(t,\bar{T}) = \int_{t}^{\bar{T}} \Phi_c^T(\tau,t)L(t)\Phi_c(\tau,t)d\tau \tag{46}$$

A integral definida pela Eq. 46 é a solução da seguinte equação:

$$-\dot{M} = MA_c + A_c^T M + L \tag{47}$$

$$P(t) = R_x(t,t) = \Phi(t,t_0)P(t_0)\Phi^T(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\lambda)F(\lambda)Q_v F^T(\lambda)\Phi^T(t,\lambda)d\lambda \tag{45}$$

$$M(t,\bar{T}) = \int_{t}^{\bar{T}} \Phi_c^T(\tau,t)L(t)\Phi_c(\tau,t)d\tau \tag{46}$$

Comparando as Eqs. 45 e 46 tem-se:

- a) $\Phi_c^T(t,\tau)$ da Eq. 46 substitui $\Phi(t,\tau)$;
- b) $L(\tau)$ da Eq. 46 substitui $F(\tau)Q_v F^T(\tau)$;
- c) Os limites da integração da Eq 46 é $[t,\bar{T}]$ em vez de $[t_0,t]$.

$$-\dot{M} = MA_c + A_c^T M + L \tag{47}$$

Agora, considere a Eq. 47 com as seguintes alterações:

- A matriz A corresponde a Φ substiuindo A_c^T que corresponde a Φ_c^T;
- A matriz FQ_vF^T substituindo L;
- Trocar o sinal do membro esquerdo da Eq. 47 porque a ordem das integrais que determinam $M(t, \bar{T})$ e $P(t)$ estão invertidas

Com essas alterações obtém-se que a evolução da matriz P ao longo do tempo pode se obtida a partir da seguinte equação diferencial:

$$\dot{P} = AP + PA^T + FQ_vF^T \tag{48}$$

Se o sistema for invariante com o tempo e as matrizes F e Q_v forem constantes tem-se:

$P(t) \rightarrow \overline{P} = constante$

e a Eq. 48 reduz-se a:

$$0 = A\bar{P} + \bar{P}A^T + FQ_vF^T \tag{49}$$

Já a matriz de covariância do sinal de saída é dada por:

$$R_y(t,\tau) = E\{y(t)y^T(\tau)\} = C(t)E\{x(t)x^T\}C^T(t)$$

Em particular a matriz de covariância da saída, no instante t, é dada por:

$$P_y(t) = R_y(t,t) = C(t)P(t)C^T(t) \tag{50}$$