

PNV 5856

METODOLOGIA DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

AULA 8

Prof. Helio Mitio Morishita

2023

CONTROLE ÓTIMO

Conceitos preliminares

4.1 Estabilidade segundo o método de Lyapunov

4.1.1 Definições

- Função positiva semidefinida

Uma função $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de positiva semidefinida em D se ela satisfaz as seguintes condições:

- 1) $0 \in D$ e $V(0) = 0$
- 2) $V(x) \geq 0$, $\forall x$ em $D - \{0\}$

- Função positiva definida

Uma função $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de positiva definida em D se ela satisfaz as seguintes condições

- 1) $0 \in D$ e $V(0) = 0$
- 2) $V(x) > 0$, $\forall x$ em $D - \{0\}$

- Função negativa semidefinida (definida)

Uma função $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada de negativa semidefinida (definida) em D se $-V$ é positiva semidefinida (definida).

Exemplo

Uma função positiva definida muito utilizada em controle é

$$V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} = x^T Q x; \quad Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q = Q^T \quad (55)$$

Seja λ_i os autovalores da matriz Q . Então, pode-se mostrar que:

- $V(x)$ é positiva definida $\Leftrightarrow x^T Q x > 0, \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$
- $V(x)$ é positiva semidefinida $\Leftrightarrow x^T Q x \geq 0, \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$
- $V(x)$ é negativa definida $\Leftrightarrow x^T Q x < 0, \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i < 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$
- $V(x)$ é negativa semidefinida $\Leftrightarrow x^T Q x \leq 0, \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \leq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$



4.2 Método de Lyapunov

Sejam $x = 0$ um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que:

- 1) $V(0) = 0$
- $V(x) > 0$ em $D - \{0\}$
- $\dot{V}(x) \leq 0$ em $D - \{0\}$

Então, $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável. Se ocorrer

- 1) $V(0) = 0$
- $V(x) > 0$ em $D - \{0\}$
- $\dot{V}(x) < 0$ em $D - \{0\}$

Então, $x = 0$ é um ponto assintoticamente estável.

Controle linear quadrático (Linear Quadratic Regulator LQR)

O controle baseado em alocação de pólos tem algumas desvantagens:

- Excesso de ganhos a serem definidos

No caso de sistema multivariáveis é extremamente difícil definir todos elementos da matriz de ganho (G). Veja, por exemplo, o exemplo a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

A lei de controle é dada por:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & g_{1,3} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ou seja, neste caso há que se definir 6 incógnitas é só há 3 equações para definir os pólos;

- Dificuldade de selecionar múltiplos pólos
Muitas vezes é difícil para o projetista selecionar os pólos do sistema



9.1 WHY OPTIMUM CONTROL?

In the previous chapters we learned how to design a compensator for a single-input, single-output process which places the closed-loop poles wherever we want them to be (assuming the process is controllable and observable). Since the closed-loop poles determine the speed (bandwidth) and damping of the response, isn't this enough? Why should we want to go any farther? There are several good reasons.

The first reason for seeking an optimum controller is that in a multiple-input or multiple-output system, the pole-placement technique described in the earlier chapters does not completely specify the controller or compensator parameters (gains). Consider, for example, a k th-order plant with m inputs and the entire state vector accessible for feedback. A nondynamic controller has km parameters to be determined, but only k possible closed-loop pole locations. Thus we have to set m times as many parameters as there are poles; there are infinitely many ways by which the same closed-loop poles can be attained. Which way is best? What algorithm can be used to determine the feedback gains? From a practical standpoint, of course, the availability of more adjust-



gains? From a practical standpoint, of course, the availability of more adjustable parameters than the minimum number needed to achieve the desired closed-loop pole location is a great benefit because other things can be accomplished besides placing the closed-loop poles. But the absence of a definitive algorithm for determining a unique control law is a detriment to the system designer who does not know how to handle this “embarrassment of riches.” By choosing a control law to optimize performance (in the precise sense to be defined shortly) this embarrassment is avoided.

Formulação do problema de controle ótimo

Considere a equação de estado linear:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2)$$

Até o presente momento foi considerada a seguinte lei de controle:

$$u(t) = -Gx(t) \quad (3)$$

Na abordagem acima o objetivo é obter a matriz G para satisfazer os pólos desejados do sistema em malha fechada.

No caso do controle ótimo procura-se definir os ganhos de modo que o desempenho do sistema minimize um critério de desempenho ou função de custo (V) expresso como:

$$V = \int_t^{\bar{T}} [x^T(\tau)Q(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau)] d\tau \quad (4)$$

onde Q e R são matrizes simétricas.

Objetivo do controlador ótimo:

Obter a matriz G do controlador a partir das matrizes A , B , Q e R através de um índice de desempenho.





$$V = \int_t^{\bar{T}} [x^T(\tau)Q(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau)] d\tau \quad (4)$$

Observações sobre a função de desempenho V :

- **Multiplicação por uma constante**

Se minizarmos V o índice ρV , onde ρ é uma constate positiva, também será mimizada.

- **Limites da integral**

O índice inferior t significa o tempo atual e $\bar{T}$ o tempo terminal ou tempo final. A diferença de tempo $\bar{T} - t$ é o intervalo de controle ou "time-to-go". Se o tempo terminal $\bar{T}$ for finito e fixado, o intervalo de controle tende para 0 e o processo de controle se encerra. O exemplo típico é de um míssel. Normalmente o tempo terminal é infinito. É o caso do controlador projetado por alocação de pólos.

$$V = \int_t^{\bar{T}} [x^T(\tau)Q(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau)] d\tau \quad (4)$$

Observações sobre a função de desempenho V :

– Matrizes Q e R

As matrizes Q e R são denominadas, respectivamente de matrizes de peso do estado e de controle. O termo $x^T Q x$ na Eq. (4) representa a penalidade do desvio do vetor x da origem. Já o termo $u^T R u$ representa o custo de controle. Valores elevados de Q significam que não se tolera muito erro no vetor de estado. Valores elevados de R impõem redução dos valores do sinal de controle.

– Resposta do sistema

É muito difícil prever, analiticamente, a resposta do sistema uma vez selecionada matriz G a partir da matrizes Q e R . O procedimento usual é obter a resposta através de simulação dinâmica e, se este não for satisfatória, refazer o cálculo da matriz G com outros valores de Q e R



Finally, consider the weighting matrices Q and R . These are often called the *state weighting* matrix and *control weighting* matrix, respectively. We are about to derive a “recipe” for finding the control gain matrix G in terms of these weighting matrices. In other words, we can plug the matrices Q and R —along with the matrices A and B that define the dynamic process—into a computer program and direct it to find G . If the process is controllable and Q and R are suitable, the computer will not fail to find G . (This is not to say that the calculation is a numerically trivial problem—far from it—but only that the problem of determining G once A , B , Q , and R are given, is not a control system design problem but a problem in numerical analysis.)



The question of concern to the control system designer is the selection of the weighting matrices Q and R . In candor one must admit that minimization of a quadratic integral of the form of (9.3) is rarely the true design objective. The problem, however, is that the true design objective often cannot be expressed in mathematical terms. And even in those instances when the design objective is amenable to mathematical expression, it is usually all but impossible to solve for the optimum control law. Expression of the design objective in the form of a quadratic integral is a practical compromise between formulating the real problem that cannot be solved, and formulating a somewhat artificial problem that can be solved easily. The need for such compromises arises in many contexts, and the control system designer should not feel guilty about being acquiescent to the need.

Exemplos

Seja $x \in \mathbb{R}^k$

– Se

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Neste caso tem-se

$$x^T Q x = x_1^2 \quad (6)$$

– Se

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & c^2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$x^T Q x = x_1^2 + c^2 x_2 \quad (8)$$



Influência da saída do sistema $y = Cx$

Como exemplo, admita que a saída só tem um componente, isto é,

$$y = c^T x \quad (9)$$

e considere que um índice de desempenho poderia ser:

$$y^2 = x^T c c^T x \quad (10)$$

E, neste caso tem-se

$$Q = c c^T \quad (11)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2)$$

$$u(t) = -Gx(t) \quad (3)$$

$$V = \int_t^{\bar{T}} [x^T(\tau)Q(\tau)x(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau)] d\tau \quad (4)$$

Equação diferencial matricial

Considerando as Eq. 2 e 3, a dinâmica do sistema em malha fechada é expressa por:

$$\dot{x} = Ax - BGx = \underbrace{(A - BG)}_{A_c} x = A_c x \quad (12)$$

Embora não seja necessário, será admitido que o sistema é variante com o tempo. Neste caso a solução da Eq. (12) é dada por:

$$x(\tau) = \Phi_c(\tau, t)x(t) \quad (13)$$

Inserindo a Eq. (13) em (4) obtem-se:

$$\begin{aligned} V &= \int_t^{\bar{T}} [x^T(\tau)Qx(\tau) + x^T(\tau)G^T R G x(\tau)] d\tau \\ &= \int_t^{\bar{T}} x^T(t)\Phi_c^T(\tau, t)\{Q + G^T R G\}\Phi_c(\tau, t)x(t)d\tau \quad (14) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= \int_t^{\bar{T}} [x^T(\tau)Qx(\tau) + x^T(\tau)G^T R G x(\tau)] d\tau \\ &= \int_t^{\bar{T}} x^T(t)\Phi_c^T(\tau, t)\{Q + G^T R G\}\Phi_c(\tau, t)x(t)d\tau \quad (14) \end{aligned}$$

Se o estado inicial $x(t)$ for retirado da integral resulta em:

$$V = x^T(t)M(t, \bar{T})x(t) \quad (15)$$

onde

$$M(t, \bar{T}) = \int_t^{\bar{T}} \Phi_c^T(\tau, t)\{Q + G^T R G\}\Phi_c(\tau, t)d\tau \quad (16)$$

Matriz
Simétrica



Para atingir os nossos objetivos é conveniente obter a equação diferencial que satisfaz a Eq. (16), isto é, $\dot{M}$. Para isto, é interessante observar que tanto a Eq.(14) como a Eq.(15) são funções do instante inicial t . Com esta consideração a Eq. (14) pode ser escrita como:

$$V(t) = \int_t^{\bar{T}} x^T(\tau)Lx(\tau)d\tau \quad (17)$$

onde

$$L = Q + G^T R G \quad (18)$$

$$V = x^T(t)M(t, \bar{T})x(t) \quad (15)$$

Desta forma tem-se:

$$\frac{dV}{dt} = -x^T(\tau)Lx(\tau) \Big|_{\tau=t} = -x^T(t)Lx(t) \quad (19)$$

Mas, derivando a Eq. (15) em relação ao tempo t e utilizando a Eq. 12 obtem-se:

$$\frac{dV}{dt} = x^T(t)[A_c^T(t)M(t, \bar{T}) + \dot{M}(t, \bar{T}) + M(t, \bar{T})A_c(t)]x(t) \quad (20)$$

Comparando a Eq. (19) com (20) conclui-se que:

$$-L = A_c^T M + \dot{M} + M A_c \quad (21)$$

ou

$$-\dot{M} = M A_c + A_c^T M + L \quad (22)$$

A Eq. (22) é importante porque comparece em teorias de controle e de estimação. Inserindo na Eq. (16) a variável L , a matriz M pode ser obtida como:

$$M(t, \bar{T}) = \int_t^{\bar{T}} \Phi_c^T(\tau, t) L \Phi_c(\tau, t) d\tau \quad (23)$$

A Eq. (22) é uma matriz de equações diferenciais de 1ª ordem que precisa de alguma condição inicial. Esta condição pode ser obtida a partir da Eq. (23):

$$M(\bar{T}, \bar{T}) = 0 \quad (24)$$



$$V = x^T(t)M(t, \bar{T})x(t) \quad (12)$$

Matriz de ganho ótimo

Foi visto que a matriz de ganho G precisa minimizar o índice de desempenho V definido pela Eq.(15). Isto significa minimizar a matriz M que, satisfaz a Eq.(22) que em termos das matrizes A , B , G , Q e R é dada por:

$$-\dot{M} = M(A - BG) + (A^T - G^T B^T)M + Q + G^T R G \quad (25)$$

O objetivo é selecionar a matriz G de tal modo que a solução da Eq.(25) apresente o menor valor possível. Isto significa que há que se obter uma matriz $\hat{M}$ tal que :

$$\hat{V} = x^T \hat{M} x < x^T M x \quad (26)$$

para qualquer estado inicial arbitrário $x(t)$ e qualquer matriz $M \neq \hat{M}$. Substituindo $\hat{M}$ e $\hat{G}$ na Eq. (25) tem-se:

$$-\dot{\hat{M}} = \hat{M}(A - B\hat{G}) + (A^T - \hat{G}^T B^T)\hat{M} + Q + \hat{G}^T R \hat{G} \quad (27)$$

$$-\dot{\hat{M}} = \hat{M}(A - B\hat{G}) + (A^T - \hat{G}^T B^T)\hat{M} + Q + \hat{G}^T R \hat{G} \quad (27)$$

Uma matriz não ótima M e G pode ser expresso como:

$$M = \hat{M} + N \quad (28)$$

e

$$G = \hat{G} + Z \quad (29)$$

Substituindo as Eqs (28) e (29) em (27) e depois subtraindo a própria Eq. (27) tem-se:

$$-\dot{N} = N A_c + A_c^T N + (\hat{G}^T R - \hat{M} B) Z + Z^T (R \hat{G} - B^T \hat{M}) + Z^T R Z \quad (30)$$

onde $A_c = A - BG = A - B(\hat{G} + Z)$

A Eq. (30) tem a mesma estrutura da Eq. (22) sendo que neste caso a matriz L é dada por:

$$L = (\hat{G}^T R - \hat{M}B)Z + Z^T((\hat{G}^T R - \hat{M}B)^T + Z^T R Z) \quad (31)$$

Considerando a Eq. (23) a solução da Eq. (30) pode ser dada por:

$$N(t, \bar{T}) = \int_t^{\bar{T}} \Phi_c^T(\tau, t) L \Phi_c(\tau, t) \quad (32)$$

Agora, se $\hat{V}$ é mínimo, deveremos ter:

$$x^T \hat{M} x \leq x^T \hat{M} x + x^T N x \quad (33)$$

que requer que $x^T N x$ seja positiva definida ou ao menos positiva semidefinida.

A Eq.(31) mostra que se Z for suficientemente pequeno os termos lineares predominam o termo quadrático $Z^T R Z$. Nesta condição, é possível obter Z tal que L seja negativa definida, o que afetaria a N . Para que isto não aconteça é necessário que:

$$R\hat{G} - B^T \hat{M} = 0 \quad (34)$$

Ou

$$\hat{G} = R^{-1} B^T \hat{M} \quad (35)$$

$$\hat{G} = R^{-1} B^T \hat{M} \quad (35)$$

Substituindo a Eq. (35) em (27) tem-se:

$$-\dot{\hat{M}} = \hat{M}A + A^T \hat{M} - \hat{M}B R^{-1} B^T \hat{M} + Q \quad (36)$$

Com as Eqs. (35) e (36) pode-se determinar a matriz de ganho $\hat{G}$ procurado.

A Eq. (36) é conhecida na literatura de controle como a equação de Riccati.

$$-\dot{\hat{M}} = \hat{M}A + A^T \hat{M} - \hat{M}BR^{-1}B^T \hat{M} + Q \quad (36)$$

Solução para regime permanente.

Para tempo final finito a matriz de ganho G é variante com o tempo mesmo que as matrizes A , B , Q e R sejam constantes. Mas considere agora o caso em que $\bar{T} \rightarrow \infty$. O objetivo agora é obter um ganho G que minimiza:

$$V_{\infty} = \int_t^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) d\tau \quad (37)$$

Neste caso ou $\hat{M}$ tenderá para o infinito ou para um valor constante $\bar{M}$. Neste último caso, $\dot{\bar{M}} = 0$ e o índice de desempenho será dada por:

$$V_{\infty} = x^T \bar{M} x \quad (38)$$

e $\bar{M}$ pode ser obtida através da seguinte equação quadrática:

$$0 = \bar{M}A + A^T \bar{M} - \bar{M}BR^{-1}B^T \bar{M} + Q \quad (39)$$



e $\bar{M}$ pode ser obtida através da seguinte equação quadrática:

$$0 = \bar{M}A + A^T \bar{M} - \bar{M}B R^{-1} B^T \bar{M} + Q \quad (39)$$

A Eq. (39) é conhecida como equação algébrica de Riccati (algebraic Riccati equation - ARE) e o ganho ótimo é obtido como:

$$\bar{G} = R^{-1} B^T \bar{M} \quad (40)$$

Soluções da equação algébrica de Riccati

$$0 = \bar{M}A + A^T\bar{M} - \bar{M}BR^{-1}\bar{M} + Q \quad (39) \quad (9.29 \text{ do livro})$$

The single matrix equation of (9.29) represents a set of $k(k + 1)/2$ coupled scalar quadratic equations. Each quadratic equation in the set in general has two solutions, so we may reasonably expect that there are $2[k(k + 1)/2] = k(k + 1)$ different (symmetric) solutions to (9.29). Are all the solutions correct? Is only one solution correct? Are there perhaps no correct solutions?

The answers to these questions are, as one might imagine, connected with the issues of stability and controllability, although from a strictly mathematical standpoint they depend on the three matrices A , $BR^{-1}B$, and Q and their relationships with each other. Kalman[1, 2] and others after him have addressed the issues. A complete discussion of this subject entails not only controllability, but also observability, and the more subtle concepts of *stabilizability*, *reconstructability*, and *detectability*, and is well beyond the scope of this book. (See Note 5.2.)



For most design applications the following facts about the solution of (9.29) will suffice:

- (a) If the system is asymptotically stable, or
- (b) If the system defined by the matrices (A, B) is controllable, and the system defined by (A, C) where $C'C = Q$, is observable,

Then the algebraic Riccati equation (ARE) has a *unique, positive definite* solution $\bar{M}$ which minimizes V_∞ when the control law $u = -R^{-1}B'\bar{M}x$ is used.

It should be understood that the *total* number of symmetric solutions (counting those with complex elements) is still $k(k+1)$. The assertion of the last paragraph is that one of these solutions (and not more than one) is positive-definite. Since the integral (9.28) is clearly positive-definite, that solution is the correct one. Let us examine the other possibilities.

Exemplo 9A

Considere o modelo matemático de um pêndulo invertido sem amortecimento definida por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u \quad (41)$$

Lembrar que $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$.

Sejam as matrizes Q e R dadas por:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \left[\frac{1}{c^2} \right]$$

Com isso, o índice de desempenho é dado por:

$$V = \int_t^\infty \left(\theta^2 + \frac{u^2}{c^2} \right) d\tau \quad (42)$$

A matriz $\hat{M}$ é dada por:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

A matriz de ganho G procurada é, em termos dos elementos da matriz $\hat{M}$, dada por:

$$\hat{G} = R^{-1}B^T\hat{M} = [c^2m_2 \quad c^2m_3] \quad (44)$$

Substituindo convenientemente os valores na equação algébrica de Riccati obtem-se:

$$0 = 2m_2\Omega^2 - c^2m_2^2 + 1 \quad (45)$$

$$0 = m_1 + m_3\Omega^2 - c^2m_2m_3 \quad (46)$$

$$0 = 2m_2 - c^2m_3^2 \quad (47)$$

Com isso as soluções procuradas são:

$$m_2 = \frac{\Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2}}{c^2} \quad \text{e} \quad m_3 = \frac{1}{c}\sqrt{2m_2} = \frac{\sqrt{2}}{c^2}[\Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2}]^{1/2}$$

Com isso os valores dos elementos de ganho são dados por:

$$g_1 = \Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2} \quad \text{e} \quad g_2 = \sqrt{2}[\Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2}]^{1/2}$$

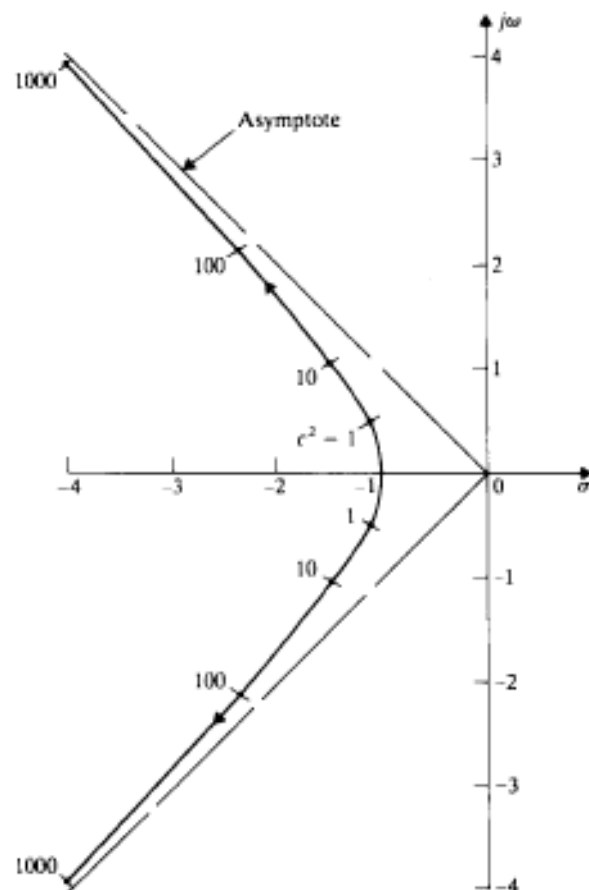
Determinando a matriz $A_c = A - BG$ pode-se calcular a equação característica do sistema em malha fechada:

$$s^2 + \sqrt{2} [\Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 + c^2}]^{1/2} s + \sqrt{\Omega^4 + c^2} = 0$$

As raízes da equação característica são:

$$s_1, s_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} [(\bar{\Omega}^2 + \Omega^2)^{1/2} \pm j(\bar{\Omega}^2 - \Omega^2)^{1/2}] \quad (48)$$

Na Fig. 9.1 são mostradas as localizações dos pólos do sistema ao variar a matriz R através da constante c



$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} \end{bmatrix}$$

$$s_1, s_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} [(\bar{\Omega}^2 + \Omega^2)^{1/2} \pm j(\bar{\Omega}^2 - \Omega^2)^{1/2}]$$

Figure 9.1 Locus of closed-loop poles of controlled inverted pendulum as weighting factor is varied.

The locus of closed-loop poles as the weighting factor c is varied from ∞ to 0 as shown in Fig. 9.1. The following characteristics of the locus are noteworthy:

(a) As c increases, the closed-loop roots tend to asymptotes at 45° to the real axis, and move out to ∞ along these asymptotes. This implies that the response time tends to zero and the damping factor tends to $\zeta = \sqrt{2}/2 = 0.707$. That the response time tends to zero is not surprising, since increasing c decreases the cost of control and hence makes it desirable to have a rapid response time. The asymptotic damping factor of 0.707 is entirely reasonable, since this entails good response without overshoot. But why $\zeta \rightarrow \sqrt{2}/2$ exactly and not some other value may seem astonishing. It turns out that the root loci of second-order systems under very general conditions tend to have a damping factor of $\zeta = \sqrt{2}/2$. A discussion of this feature is given below.

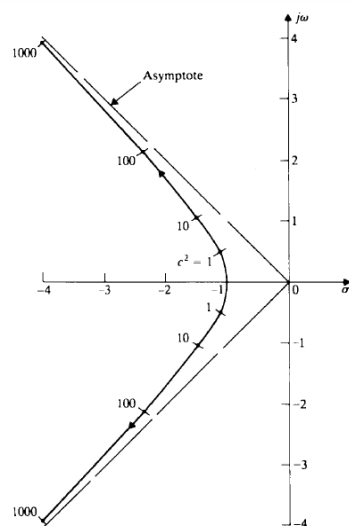


Figure 9.1 Locus of closed-loop poles of controlled inverted pendulum as weighting factor is varied.



(b) As c tends to zero, the cost of control tends to a nonzero value. If the open-loop system were stable, and it would turn out that the gains g_1 and g_2 would tend to zero and the open-loop system would “coast” to rest, without incurring any control cost. Since control cost is paramount, this solution would be reasonable. In the present case, however, the open-loop system is unstable, and cannot coast to rest without control. A certain amount of control is necessary to stabilize the system. But why do both closed-loop system poles tend to $s = -\Omega$? One might have thought that only one closed-loop pole would tend to the stable open-loop pole at $s = -\Omega$ and that the other would tend to the origin. The fact that the second closed-loop pole also tends to $s = -\Omega$ is a consequence of a general result that as the control weighting becomes very large, the closed loop poles corresponding to *unstable* open loop poles tend to their *mirror images* with respect to the imaginary axis. In other words, if $s_i = +\alpha + j\beta$ ($\alpha \geq 0$) in the open-loop system, then the corresponding pole in the closed-loop system tends to $\bar{s}_i = -\alpha + j\beta$. This is a general property of optimum control laws, as discussed in Note 9.4.

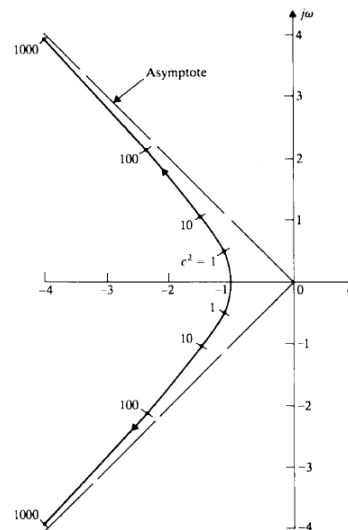


Figure 9.1 Locus of closed-loop poles of controlled inverted pendulum as weighting factor is varied.

CONTROLE ÓTIMO

Introdução de termos exógenos (ver seção 9.6 do livro texto)

É perfeitamente possível introduzir termos exógenos devidos a referência e esforços externos na dinâmica do sistema. Neste caso a equação de estado é dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ex_0 \quad (49)$$

onde x_0 é o vetor de componentes exógenos. Admite-se que a sua dinâmica é dada por:

$$\dot{x}_0 = A_0 x_0 \quad (50)$$

Pode-se, então, definir um "metasystem" governado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (51)$$

Onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Como os termos exógenos são incontroláveis, o índice de desempenho é definido como:

$$V = \int_t^{\bar{T}} (x^T Q x + u^T R u) d\tau \quad (53)$$

A matriz de peso do metaestado é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando o problema de tempo finito definido pela Eq. (4), o ganho $\hat{G}$ pode ser obtido como:

$$\hat{G} = R^{-1} \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix} \hat{M} = R^{-1} \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{M}_1 & \hat{M}_2 \\ \hat{M}_2^T & \hat{M}_3 \end{bmatrix}}_{\hat{M}} = \begin{bmatrix} R^{-1} B^T \hat{M}_1 & R^{-1} B^T \hat{M}_2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

As dinâmicas dos elementos da matriz $\hat{M}$ podem se obtidas pela equação de Riccati (Eq.27), isto é, $\dot{M}$

$$-\dot{\hat{M}}_1 = \hat{M}_1 A + A^T \hat{M}_1 - \hat{M}_1 - \hat{M}_1 B R^{-1} B^T \hat{M}_1 + Q \quad (55)$$

$$-\dot{\hat{M}}_2 = \hat{M}_1 E + \hat{M}_2 A_0 + (A^T - \hat{M}_1 B R^{-1} B^T) \hat{M}_2 \quad (56)$$

$$-\dot{\hat{M}}_3 = \hat{M}_3 A_0 + A_0^T \hat{M}_3 + \hat{M}_2^T E + E^T \hat{M}_2 - \hat{M}_2^T B R^{-1} B^T \hat{M}_2 \quad (57)$$

A partir destas equações, considerando $t \rightarrow \infty$ obtém-se a seguinte lei de controle:

$$u = -R^{-1} B^T \bar{M}_1 x - R^{-1} B^T \bar{M}_2 x_0 \quad (58)$$

onde $\bar{M}_1$ e $\bar{M}_2$ podem ser obtidas a partir das Eqs. (55) e (56).

Em termos de sinais de perturbação, um caso de interesse em controle é quando $A_0 = 0$, isto é, o sinal de referência é um degrau. Neste caso, a Eq. (56) é dada por:

$$-\dot{\hat{M}}_2 = \hat{M}_1 E + A_c^T \hat{M}_2 \quad (59)$$

onde $A_c = A - BR^{-1}B^T \hat{M}_1$

Para $\bar{T} \rightarrow \infty$, com $\hat{M}_2 = 0$ (ver detalhes no livro-texto) tem-se:

$$\bar{M}_2 = -(A_c^T)^{-1} \bar{M}_1 E \quad (60)$$

Desta forma, o ganho G_0 é dada por:

$$G_0 = -R^{-1}B^T \bar{M}_2 = -R^{-1}B^T (A_c^T)^{-1} \bar{M}_1 E = B^* E = G_0^* \quad (61)$$

onde $B^* = -R^{-1}B^T (A_c^T)^{-1} \bar{M}_1$