MAT-315 - Introdução à Análise (Real) - 2023

3ª Prova

Tipo A3

Nome: Gabarito NUSP: ________

Não é permitido usar qualquer aparelho eletrônico.

Questão 1. (2,0 pontos) Decida se as afirmações abaixo são falsas ou verdadeiras. Três respostas erradas anulam uma certa. Muito cuidado com hipóteses faltando! Leia atentamente.

(F) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e $b_n \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente. $\to a_n = 0$ e $b_n = -1$

(F) Se $a_n \to 0$ e $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ $a_n = -1/n$

(V) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

(V) Se (a_n) é de Cauchy, então toda subsequência de (a_n) é de Cauchy. (Cauchy $\Leftrightarrow$ convergente)

(V) Toda sequência limitada possui subsequência convergente.

(F) f é contínua em $\mathbb{R}$ se e somente se a função $|f|$ é contínua em $\mathbb{R}$; $\to f(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ +1, & x \leq 0 \end{cases}$

(F) Toda função contínua em um *intervalo* assume valor máximo e valor mínimo; $f(x) = tg x$ em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(V) Existem funções que são descontínuas em todos os pontos do domínio. Lista

Questão 2. (1,0 ponto) Escolha uma afirmação **falsa** do exercício anterior e exiba um contraexemplo. Não é necessário demonstrar.

acima

Questão 3. (3,0 pontos) Verifique quais são convergentes ou divergentes. Justifique sua resposta.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+5}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n^2}$

a_{n+1}/a_n

a) $\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \therefore$ converge

(teste da Razão)

b) $\frac{n}{2n+5} \longrightarrow 1/2 \therefore a_n \not\to 0$ e ñ converge

(teste do termo geral)

c) $\sum \frac{1}{3^{n^2}}$

$n \leq n^2, \forall n \Rightarrow 3^n \leq 3^{n^2}, \forall n$

$\Rightarrow \frac{1}{3^{n^2}} \leq \underbrace{\frac{1}{3^n}}_{\text{converge (PG)}}, \forall n$

$\therefore \sum \frac{1}{3^{n^2}}$ converge

obs: na Lista era $\sum 2^{-n^2}$

obs 2: Poderia usar a razão também

Questão 4. (2,0 pontos) Mostre, pela definição, que a função $f(x) = 3x + 5$ é contínua em $a = 1$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/3$

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \varepsilon/3 \Rightarrow |3x-3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |3x+5-(3+5)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

Questão 5. (2,0 pontos) Prove que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série absolutamente convergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada (isto é, existe $M > 0$ tal que $|b_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$), então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ é convergente.
Dica: Mostre que tal série é absolutamente convergente usando o critério da comparação.

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n| \cdot M$$

$$\underbrace{\sum |a_n| . M = M \cdot \underbrace{\sum |a_n|}_{\text{converge}}}_{\text{converge (Lista)}}$$

como $\sum |a_n| . M$ converge, pelo critério da comparação $\sum |a_n b_n|$ converge.

Então $\sum a_n b_n$ tb converge

(abs. conv. $\Rightarrow$ converg.)

Obs3: O Teste da Comparação é termo a termo. Não pode usar uma "desigualdade triangular infini
pois se não sabe se converge, pode escrever que é menor que algo?