

LISTA 6

3)

a) Como, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e quaisquer (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) em $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2), 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), -(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2)) \\ &= ((x_1 - y_1 + 2z_1) + (x_2 - y_2 + 2z_2), (2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2), (-x_1 - 2y_1 + 2z_1) + (-x_2 - 2y_2 + 2z_2)) \\ &= (x_1 - y_1 + 2z_1, 2x_1 + y_1, -x_1 - 2y_1 + 2z_1) + (x_2 - y_2 + 2z_2, 2x_2 + y_2, -x_2 - 2y_2 + 2z_2) \\ &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda(x_1, y_1, z_1)) &= T(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \\ &= (\lambda x_1 - \lambda y_1 + 2(\lambda z_1), 2(\lambda x_1) + (\lambda y_1), -(\lambda x_1) - 2(\lambda y_1) + 2(\lambda z_1)) \\ &= (\lambda(x_1 - y_1 + 2z_1), \lambda(2x_1 + y_1), \lambda(-x_1 - 2y_1 + 2z_1)) \\ &= \lambda(x_1 - y_1 + 2z_1, 2x_1 + y_1, -x_1 - 2y_1 + 2z_1) \\ &= \lambda T(x_1, y_1, z_1), \end{aligned}$$

T é linear.

b) Como, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z) \\ &= x(1, 2, -1) + y(-1, 1, -2) + z(2, 0, 2), \end{aligned}$$

$\text{Im}(T) = \{(1, 2, -1), (-1, 1, -2), (2, 0, 2)\}$. Sendo assim, como

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} L_2' &:= L_2 - 2L_1 \\ L_3' &:= L_3 + L_1 \\ L_3'' &:= L_3' + L_2 \end{aligned}$$

$\{(1, 2, -1), (-1, 1, -2)\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$. Vamos, agora, encontrar uma base de $\text{Ker}(T)$. Para isso, notemos, inicialmente, que, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Como

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = y - 2z \\ y = \frac{4}{3}z \end{cases} \sim \begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = \frac{4}{3}z \end{cases}$$

a matriz dos coeficientes
do sistema é a que es-
calhamos anteriormente

disso resulta que, para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = \frac{4}{3}z \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T) &= \left\{ \left(-\frac{2}{3}z, \frac{4}{3}z, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1 \right) : z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left[\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1 \right) \right] \end{aligned}$$

— a partir do que concluímos, em vista do fato de que $\left\{ \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1 \right) \right\}$ é LI,
que $\left\{ \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1 \right) \right\}$ é uma base de $\text{Ker}(T)$.