Problema 16

São dados segmentos congruentes AB ≅ A'B' e dois pares de ângulos congruentes ∠XAB ≅ ∠X'A'B' e ∠YBA ≅ ∠Y'B'A'. Mostre que, se as semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$ se interceptam e se X' e Y' estão do mesmo lado da reta A'B', então $\overrightarrow{A'X'}$ e $\overrightarrow{B'Y'}$ se interceptam.
Demonstração:

Seja C o ponto de intersecção entre as semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$. Por C1, podemos tomar C' em $\overrightarrow{B'Y'}$ tal que BC ≅ B'C'. Como, também, ∠CBA = ∠YBA (porque C está na semirreta $\overrightarrow{BY}$) e ∠YBA ≅ ∠Y'B'A' = ∠C'B'A' (pois C' está na semirreta $\overrightarrow{B'Y'}$) e AB ≅ A'B' pela hipótese, por LAL temos que ΔABC ≅ ΔA'B'C'.

Segue que ∠BAC ≅ ∠B'A'C', mas ∠BAC = ∠BAX (pois C está em $\overrightarrow{AX}$ e portanto $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC}$) e ∠BAX ≅ ∠B'A'X' pela hipótese. Logo, pelo axioma C5, temos que ∠B'A'C' ≅ ∠B'A'X'. Assim, podemos concluir que $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'X'}$ pois, caso contrário, como pelo axioma C5 ∠B'A'C' ≅ ∠B'A'C', teríamos duas semirretas distintas $\overrightarrow{A'C'}$ e $\overrightarrow{A'X'}$ no mesmo semiplano (pois pelo lema 4.13 C' e Y' estão do mesmo lado da reta ↔A'B' e como X' e Y' também estão do mesmo lado, então C' e X' estão do mesmo lado da reta) tais que os ângulos ∠B'A'C' ∠B'A'X' são congruentes, contrariando a unicidade garantida pelo axioma C4. Portanto, como $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'X'}$ então C' está em $\overrightarrow{A'X'}$ e em $\overrightarrow{A'Y'}$. Dessa forma, encontramos um ponto que está nas duas semirretas, provando que elas se interceptam.