

Problema 14

Este problema estava na P1, por isso estou enviando uma resolução diferente feita pelo aluno Nicholas Akyo Minato Murrace

Suponha que $A * B * C$ na reta r e que $A * D * E$ na reta s . Mostre que os segmentos BE e CD se interceptam em um ponto M e que M pertence ao interior do ângulo $\angle CAE$.

Resposta: Vamos começar mostrando que BE e CD se interceptam. Considere o triângulo $\triangle AEB$ e a reta \overleftrightarrow{CD} , note que \overleftrightarrow{CD} intercepta o lado AE (pois $A * D * E$), então \overleftrightarrow{CD} intercepta pelo menos um dos outros dois lados (proposição 4.5). Note que \overleftrightarrow{CD} não pode interceptar o segmento AB , pois $AB \subset r$ e C pertence a r , o que resultaria em \overleftrightarrow{CD} cruzando AB no ponto C , pois duas retas se cruzam em um único ponto, e, portanto, $A * C * B$. Portanto temos que \overleftrightarrow{CD} deve interceptar o lado/segmento BE .

Agora considere o triângulo $\triangle ACD$ e a reta \overleftrightarrow{BE} , note que \overleftrightarrow{BE} intercepta o lado AC (pois $A * B * C$), então \overleftrightarrow{BE} intercepta pelo menos um dos outros dois lados. Note que \overleftrightarrow{BE} não pode interceptar o segmento AD , pois $AD \subset s$ e E pertence a s , o que resultaria em \overleftrightarrow{BE} cruzando AD no ponto E , ou seja, $A * E * D$. Portanto temos que \overleftrightarrow{BE} deve interceptar o lado CD .

Então temos que \overleftrightarrow{CD} intercepta BE e \overleftrightarrow{BE} intercepta $CD \Rightarrow BE$ e CD se interceptam em um mesmo ponto M já que duas retas se cruzam uma única vez.

Por último, vamos mostrar que M pertence ao interior do ângulo $\angle CAE$. Para isso, precisamos provar que (i) C e M estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AE} e (ii) E e M estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AC} , ou seja, CM não intercepta \overleftrightarrow{AE} e EM não intercepta \overleftrightarrow{AC} .

(i) Note que $CM \subset \overleftrightarrow{CM}$ e que $\overleftrightarrow{CM} = \overleftrightarrow{CD}$ intercepta \overleftrightarrow{AE} em D , como o ponto de intersecção é único e temos $C * M * D$, então CM não intercepta a reta \overleftrightarrow{AE} ($C * M * D \Rightarrow D$ não pertence a CM).

(ii) Note que $EM \subset \overleftrightarrow{EM}$ e que \overleftrightarrow{EM} intercepta \overleftrightarrow{AC} em B , como o ponto de intersecção é único e temos $E * M * B$, então EM não intercepta a reta \overleftrightarrow{AC} .