

## Problema 14

Este problema estava na P1, por isso estou enviando uma resolução diferente feita pelo aluno Nicholas Akyo Minato Murrace

Suponha que  $A * B * C$  na reta  $r$  e que  $A * D * E$  na reta  $s$ . Mostre que os segmentos  $BE$  e  $CD$  se interceptam em um ponto  $M$  e que  $M$  pertence ao interior do ângulo  $\angle CAE$ .

**Resposta:** Vamos começar mostrando que  $BE$  e  $CD$  se interceptam. Considere o triângulo  $\triangle AEB$  e a reta  $\overleftrightarrow{CD}$ , note que  $\overleftrightarrow{CD}$  intercepta o lado  $AE$  (pois  $A * D * E$ ), então  $\overleftrightarrow{CD}$  intercepta pelo menos um dos outros dois lados (proposição 4.5). Note que  $\overleftrightarrow{CD}$  não pode interceptar o segmento  $AB$ , pois  $AB \subset r$  e  $C$  pertence a  $r$ , o que resultaria em  $\overleftrightarrow{CD}$  cruzando  $AB$  no ponto  $C$ , pois duas retas se cruzam em um único ponto, e, portanto,  $A * C * B$ . Portanto temos que  $\overleftrightarrow{CD}$  deve interceptar o lado/segmento  $BE$ .

Agora considere o triângulo  $\triangle ACD$  e a reta  $\overleftrightarrow{BE}$ , note que  $\overleftrightarrow{BE}$  intercepta o lado  $AC$  (pois  $A * B * C$ ), então  $\overleftrightarrow{BE}$  intercepta pelo menos um dos outros dois lados. Note que  $\overleftrightarrow{BE}$  não pode interceptar o segmento  $AD$ , pois  $AD \subset s$  e  $E$  pertence a  $s$ , o que resultaria em  $\overleftrightarrow{BE}$  cruzando  $AD$  no ponto  $E$ , ou seja,  $A * E * D$ . Portanto temos que  $\overleftrightarrow{BE}$  deve interceptar o lado  $CD$ .

Então temos que  $\overleftrightarrow{CD}$  intercepta  $BE$  e  $\overleftrightarrow{BE}$  intercepta  $CD \Rightarrow BE$  e  $CD$  se interceptam em um mesmo ponto  $M$  já que duas retas se cruzam uma única vez.

Por último, vamos mostrar que  $M$  pertence ao interior do ângulo  $\angle CAE$ . Para isso, precisamos provar que (i)  $C$  e  $M$  estão do mesmo lado da reta  $\overleftrightarrow{AE}$  e (ii)  $E$  e  $M$  estão do mesmo lado da reta  $\overleftrightarrow{AC}$ , ou seja,  $CM$  não intercepta  $\overleftrightarrow{AE}$  e  $EM$  não intercepta  $\overleftrightarrow{AC}$ .

(i) Note que  $CM \subset \overleftrightarrow{CM}$  e que  $\overleftrightarrow{CM} = \overleftrightarrow{CD}$  intercepta  $\overleftrightarrow{AE}$  em  $D$ , como o ponto de intersecção é único e temos  $C * M * D$ , então  $CM$  não intercepta a reta  $\overleftrightarrow{AE}$  ( $C * M * D \Rightarrow D$  não pertence a  $CM$ ).

(ii) Note que  $EM \subset \overleftrightarrow{EM}$  e que  $\overleftrightarrow{EM}$  intercepta  $\overleftrightarrow{AC}$  em  $B$ , como o ponto de intersecção é único e temos  $E * M * B$ , então  $EM$  não intercepta a reta  $\overleftrightarrow{AC}$ .