

MAT0225 - Funções Analíticas

Lista 4

2º Semestre de 2023

(1) Mostre que existem polinômios $h_0(t), h_1(t), \dots$ tais que

$$e^{tz - \frac{z^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t) z^n$$

para todo z complexo.

(2) Seja $(f_n)_{n \geq 0}$ a sequência de Fibonacci, i.e., $f_0 = 0, f_1 = 1$ e, para todo $n \geq 0, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Além disso, seja $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$.

(a) Prove que, no interior do disco de convergência da série, f satisfaz a seguinte equação:

$$f(z) = z + z f(z) + z^2 f(z).$$

(b) Use o item anterior para encontrar uma fórmula fechada para f_n .

(3) Determine a natureza das singularidades isoladas das seguintes funções (indicando a ordem, caso seja um polo):

(a) $\frac{z+1}{z^2-2z}$

(b) $\operatorname{tgh} z$

(c) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$

(d) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

(e) $\frac{z}{\cos z}$

(f) $\frac{e^z}{z^2 + \pi^2}$.

(4) Calcule os resíduos das funções a seguir em cada uma de suas singularidades isoladas:

(a) $z \cos(1/z)$

(b) $\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}$

(c) $\frac{1}{z^3(z+4)}$.

(5) Seja f uma função analítica em um domínio D e z_0 a única raiz de f em D . Se C é uma curva fechada percorrida positivamente tal que z_0 está em seu interior, prove que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m,$$

onde m é a ordem da raiz z_0 .

(6) Seja f uma função analítica em $\mathbb{C} - \{0\}$ e ímpar, i.e., $f(-z) = -f(z)$ para todo complexo $z \neq 0$. Prove que todos os termos de ordem ímpar na série de Laurent de f em torno de 0 são iguais a zero.

(7) Seja f uma função inteira não constante. Prove que a imagem de f é densa no plano complexo.

(8)

(a) Seja z_0 uma singularidade removível das funções f e g . É verdade que z_0 é uma singularidade isolada da função fg ? Em caso afirmativo, é possível determinar sua natureza (e ordem, caso seja polo)?

(b) Seja z_0 um polo de ordem m da função f e um polo de ordem n da função g . É verdade que z_0 é uma singularidade isolada da função fg ? Em caso afirmativo, é possível determinar sua natureza (e ordem, caso seja polo)?

(9) Calcule

(a) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{x^2+1}$, onde $a > 0$

(c) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+k \cos(\theta)}$, onde $-1 < k < 1$.