MAT0122 - Ágebra Linear I

Lista 7 - 2023

1. Mostre que se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ é uma transformação linear tal que todo vetor não nulo de V é autovetor de T, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $T = \alpha I$, onde I denota a identidade de V.

2. Seja $V = C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $T \in L(V)$ definido por
$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$
não tem autovalores.

3. Mostre que a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ onde $b \neq 0$ não é diagonalizável.

4. Seja $T \in L(\mathbb{R}^n)$ tal que $T^2 = T$. Mostre que T é diagonalizável. [**Sugestão:** Use que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T$, nesse caso.

5. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$ tal que posto$(T) = 1$. Mostre que ou T é diagonalizável ou $T^2 = 0$.

6. Mostre que as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
são semelhantes.

7. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(V)$. Mostre que se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T então λ^n é autovalor de T^n.

8. Sejam $S, T \in L(V)$. Mostre que $S \circ T$ e $T \circ S$ têm os mesmos autovalores (mas não necessariamente com os mesmos autovetores).

9. Em cada item, decida se T é diagonalizável.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, x - y)$;
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2y - x, 8y - 7x)$;
   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (5x - y, 9z - 5y, 5x - y)$;
   (d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T(x, y, z, t) = (x, x + y, 2z, 3t)$.

10. Determine, se existirem, os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares $T \in L(\mathbb{R}^2)$ em que $[T]_{can}$ é a matriz

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

11. Determine, se existirem, os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares $T \in L(\mathbb{R}^3)$ em que $[T]_{can}$ é a matriz

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. Para cada matriz dos Exercícios 9 e 10, determine, quando existir, uma matriz $P \in M_2(\mathbb{R})$ (ou $P \in M_3(\mathbb{R})$) tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

13. Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Mostre que se $T \in L(V)$ tem n autovalores distintos então T é diagonalizável.

14. Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{can} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine condições em a, b, c e d para que T seja diagonalizável.

15. Seja $T \in L(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores T e dê uma interpretação geométrica do operador linear T.

16. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}.$$

Determine A^p para qualquer inteiro positivo p.