

Física III

Alexandre Yasuda Miguelote



- 1 Cargas Elétricas
- 2 Campo Elétrico
- 3 Lei de Gauss
- 4 Potencial Elétrico
- 5 Capacitância
- 6 Corrente e Resistência
- 7 Campo Magnético
- 8 Indução e Indutância
- 9 Circuitos Elétricos

- 1 Cargas Elétricas
- 2 Campo Elétrico
- 3 Lei de Gauss
- 4 Potencial Elétrico
- 5 Capacitância
- 6 Corrente e Resistência
- 7 Campo Magnético
- 8 Indução e Indutância
- 9 Circuitos Elétricos

- 1 Cargas Elétricas
- 2 Campo Elétrico
- 3 Lei de Gauss
- 4 Potencial Elétrico
- 5 Capacitância
- 6 Corrente e Resistência
- 7 Campo Magnético
- 8 Indução e Indutância
- 9 Circuitos Elétricos

- 1 Cargas Elétricas
- 2 Campo Elétrico
- 3 Lei de Gauss
- 4 Potencial Elétrico
- 5 Capacitância
- 6 Corrente e Resistência
- 7 Campo Magnético
- 8 Indução e Indutância
- 9 Circuitos Elétricos

- 1 Cargas Elétricas
- 2 Campo Elétrico
- 3 Lei de Gauss
- 4 Potencial Elétrico
- 5 Capacitância
- 6 Corrente e Resistência
- 7 Campo Magnético
- 8 Indução e Indutância
- 9 Circuitos Elétricos

- 1 Cargas Elétricas
- 2 Campo Elétrico
- 3 Lei de Gauss
- 4 Potencial Elétrico
- 5 Capacitância
- 6 Corrente e Resistência
- 7 Campo Magnético
- 8 Indução e Indutância
- 9 Circuitos Elétricos

Conteúdo

- 1 Cargas Elétricas
- 2 Campo Elétrico
- 3 Lei de Gauss
- 4 Potencial Elétrico
- 5 Capacitância
- 6 Corrente e Resistência
- 7 Campo Magnético
- 8 Indução e Indutância
- 9 Circuitos Elétricos

- 1 Cargas Elétricas
- 2 Campo Elétrico
- 3 Lei de Gauss
- 4 Potencial Elétrico
- 5 Capacitância
- 6 Corrente e Resistência
- 7 Campo Magnético
- 8 Indução e Indutância
- 9 Circuitos Elétricos

- 1 Cargas Elétricas
- 2 Campo Elétrico
- 3 Lei de Gauss
- 4 Potencial Elétrico
- 5 Capacitância
- 6 Corrente e Resistência
- 7 Campo Magnético
- 8 Indução e Indutância
- 9 Circuitos Elétricos

- D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física*, Vol. 3. 10a. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2016.
- R. A. Serway e J. W. Jewett, Jr., *Princípios de Física*, Vol. 3. São Paulo: Cengage Learning Edições Ltda., 2015.
- P. A. Tipler e G. Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros*, Vol. 2. 6a. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2009.
- H. D. Young e R. A. Freedman, *Física III*. 14a. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

- D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física*, Vol. 3. 10a. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2016.
- R. A. Serway e J. W. Jewett, Jr., *Princípios de Física*, Vol. 3. São Paulo: Cengage Learning Edições Ltda., 2015.
- P. A. Tipler e G. Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros*, Vol. 2. 6a. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2009.
- H. D. Young e R. A. Freedman, *Física III*. 14a. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

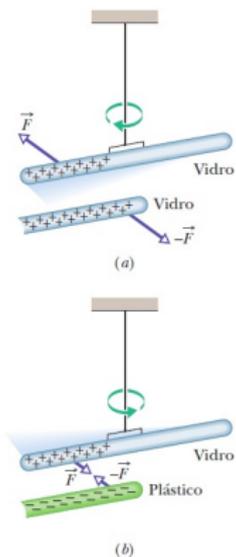
- D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física*, Vol. 3. 10a. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2016.
- R. A. Serway e J. W. Jewett, Jr., *Princípios de Física*, Vol. 3. São Paulo: Cengage Learning Edições Ltda., 2015.
- P. A. Tipler e G. Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros*, Vol. 2. 6a. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2009.
- H. D. Young e R. A. Freedman, *Física III*. 14a. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

- D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física*, Vol. 3. 10a. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2016.
- R. A. Serway e J. W. Jewett, Jr., *Princípios de Física*, Vol. 3. São Paulo: Cengage Learning Edições Ltda., 2015.
- P. A. Tipler e G. Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros*, Vol. 2. 6a. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2009.
- H. D. Young e R. A. Freedman, *Física III*. 14a. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.



1.1 Cargas Eléctricas

Cargas eléctricas de mesmo sinal se repelem e de sinais opostos se atraem.



1.2 Condutores e Isolantes

- Condutores são materiais nos quais as cargas elétricas se movem livremente. Exs.: metais (como o cobre dos fios elétricos), corpo humano, água da torneira etc.
- Isolantes são materiais nos quais as cargas não podem se mover. Exs.: plásticos (usados para isolar os fios elétricos), borracha, água destilada etc.
- Semicondutores são materiais com propriedades elétricas intermediárias entre as dos condutores e as dos isolantes. Exs.: silício e germânio (usados nos microcircuitos eletrônicos).
- Supercondutores são condutores perfeitos, ou seja, materiais nos quais as cargas se movem sem encontrar nenhuma resistência. Ex.: grafeno.

1.2 Condutores e Isolantes

- Condutores são materiais nos quais as cargas elétricas se movem livremente. Exs.: metais (como o cobre dos fios elétricos), corpo humano, água da torneira etc.
- Isolantes são materiais nos quais as cargas não podem se mover. Exs.: plásticos (usados para isolar os fios elétricos), borracha, água destilada etc.
- Semicondutores são materiais com propriedades elétricas intermediárias entre as dos condutores e as dos isolantes. Exs.: silício e germânio (usados nos microcircuitos eletrônicos).
- Supercondutores são condutores perfeitos, ou seja, materiais nos quais as cargas se movem sem encontrar nenhuma resistência. Ex.: grafeno.

1.2 Condutores e Isolantes

- Condutores são materiais nos quais as cargas elétricas se movem livremente. Exs.: metais (como o cobre dos fios elétricos), corpo humano, água da torneira etc.
- Isolantes são materiais nos quais as cargas não podem se mover. Exs.: plásticos (usados para isolar os fios elétricos), borracha, água destilada etc.
- **Semicondutores são materiais com propriedades elétricas intermediárias entre as dos condutores e as dos isolantes. Exs.: silício e germânio (usados nos microcircuitos eletrônicos).**
- Supercondutores são condutores perfeitos, ou seja, materiais nos quais as cargas se movem sem encontrar nenhuma resistência. Ex.: grafeno.

1.2 Condutores e Isolantes

- Condutores são materiais nos quais as cargas elétricas se movem livremente. Exs.: metais (como o cobre dos fios elétricos), corpo humano, água da torneira etc.
- Isolantes são materiais nos quais as cargas não podem se mover. Exs.: plásticos (usados para isolar os fios elétricos), borracha, água destilada etc.
- Semicondutores são materiais com propriedades elétricas intermediárias entre as dos condutores e as dos isolantes. Exs.: silício e germânio (usados nos microcircuitos eletrônicos).
- Supercondutores são condutores perfeitos, ou seja, materiais nos quais as cargas se movem sem encontrar nenhuma resistência. Ex.: grafeno.

1.3 Lei de Coulomb

A lei de Coulomb expressa a força eletrostática, de repulsão ou atração, entre duas partículas em repouso carregadas, cujo módulo é dada por

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \text{ (lei de Coulomb),} \quad (1.1)$$

em que q_1 e q_2 são as cargas das partículas 1 e 2, respectivamente, separadas por uma distância r e

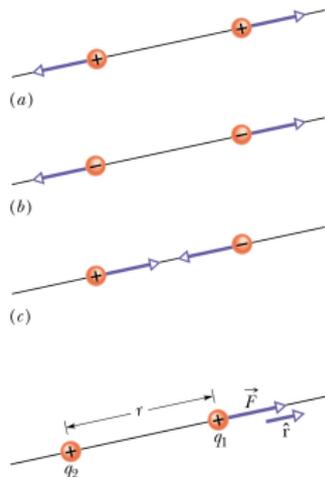
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (1.2)$$

é a constante eletrostática e

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (1.3)$$

é a permissividade elétrica do vácuo.

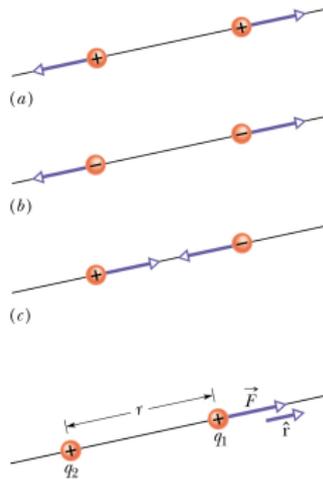
Unidade de carga elétrica no SI: C (coulomb)



Na forma vetorial, a mesma pode ser escrita como

$$\vec{F} = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \hat{r}, \quad (1.4)$$

em que \hat{r} é o vetor unitário na direção da reta que liga as duas partículas.



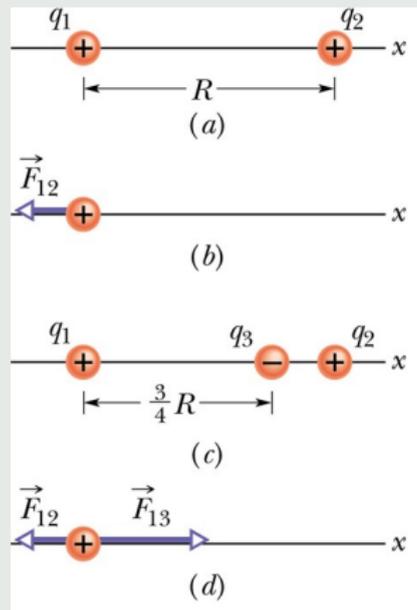
Em um sistema com n partículas carregadas, estas interagem independentemente, aos pares, e a força que age sobre uma das partículas, a partícula 1, por exemplo, é dada pela soma vetorial

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n}, \quad (1.5)$$

em que, por exemplo, \vec{F}_{12} é a força que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1.

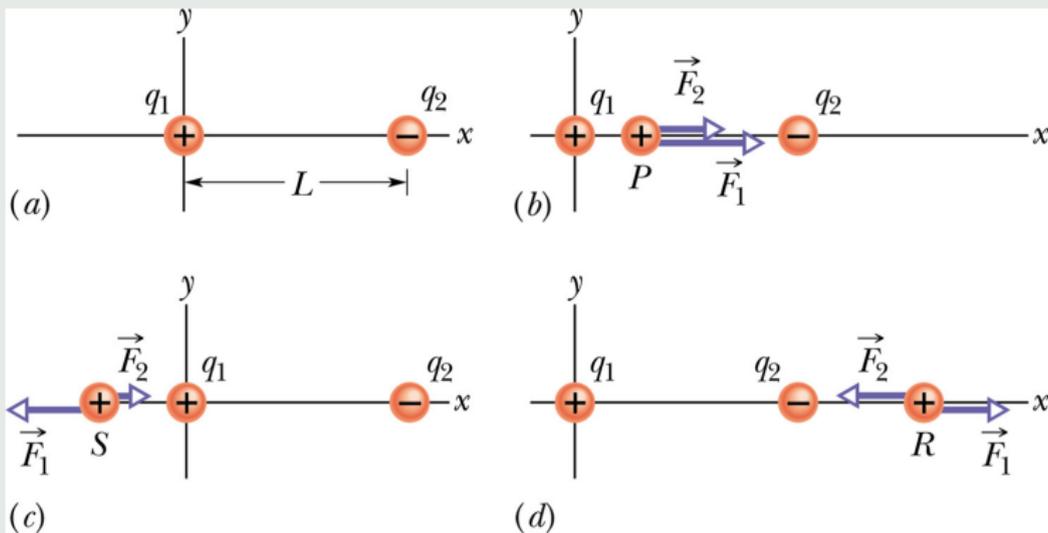
Exemplo 1.1

(a) A Fig. (a) mostra duas partículas positivamente carregadas situadas em pontos fixos do eixo x . As cargas são $q_1 = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ e $q_2 = 3,20 \times 10^{-19} \text{ C}$, e a distância entre elas é $R = 0,0200 \text{ m}$. Determine o módulo e a orientação da força eletrostática \vec{F}_{12} exercida pela partícula 2 sobre a partícula 1. (b) A Fig. (c) é idêntica à Fig. (a), exceto pelo fato de que agora existe uma partícula 3 no eixo x entre as partículas 1 e 2. A partícula 3 tem uma carga $q_3 = -3,20 \times 10^{-19} \text{ C}$ e está a uma distância $3R/4$ da partícula 1. Determine a força eletrostática exercida sobre a partícula 1 pelas partículas 2 e 3.



Exemplo 1.2

A Fig. (a) mostra duas partículas fixas: uma partícula de carga $q_1 = +8q$ na origem e uma partícula de carga $q_2 = -2q$ em $x = L$. Em que ponto (que não esteja a uma distância infinita das cargas) um próton pode ser colocado de modo a ficar em equilíbrio?



1.4 Carga Elementar

A carga elétrica é quantizada: todas as cargas elétricas podem ser escritas na forma ne , em que n é um número inteiro

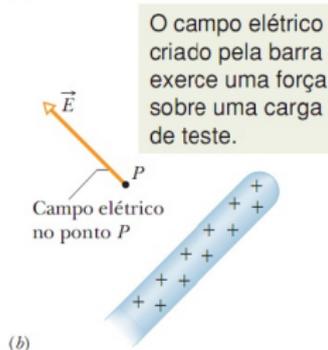
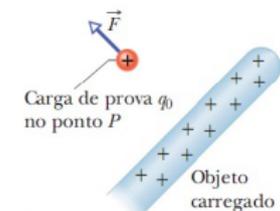
$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.6)$$

é uma constante física conhecida como carga elementar.

A carga elétrica é conservada: a carga elétrica de qualquer sistema isolado é constante.



2.1 Campo Elétrico



O campo elétrico \vec{E} em qualquer ponto do espaço é definido em termos da força eletrostática \vec{F} que seria exercida em uma carga de prova positiva q_0 colocada nesse ponto, tal que

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \text{ (campo elétrico).} \quad (2.1)$$

Unidade no SI: N/C

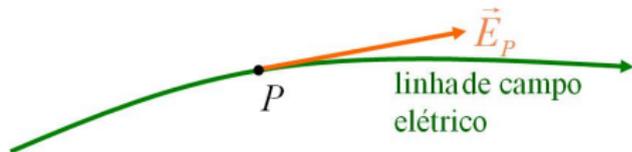
Alguns Campos Elétricos

Local ou Situação	Valor (N/C)
Superfície de um núcleo de urânio	3×10^{21}
Átomo de hidrogênio, a uma distância de $5,29 \times 10^{-11}$ m do núcleo	5×10^{11}
Ruptura dielétrica do ar	3×10^6
Perto da superfície carregada de uma fotocopiadora	10^5
Perto de um pente carregado	10^3
Atmosfera inferior	10^2
Interior de um fio de cobre de uma instalação residencial	10^{-2}

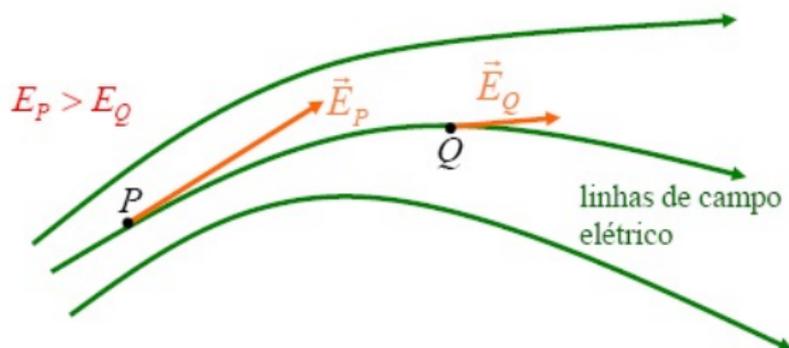
2.2 Linhas de Campo Elétrico

As linhas de campo elétrico são usadas para visualizar a orientação e a intensidade do campo elétrico.

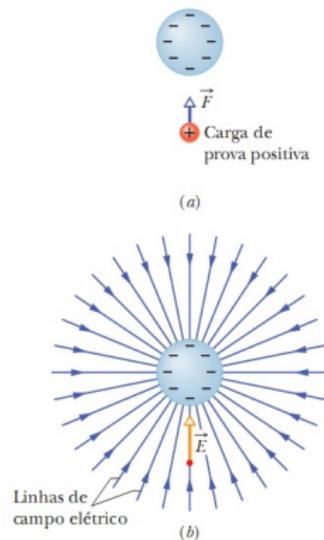
- 1 O vetor campo elétrico em qualquer ponto do espaço é tangente à linha que passa por esse ponto.

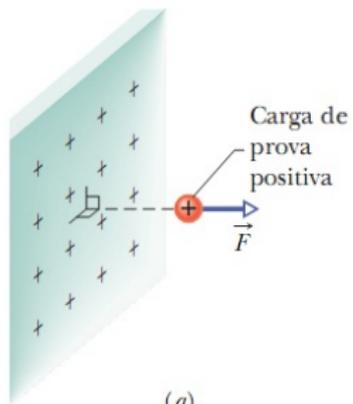


- 2 O módulo do vetor campo elétrico em uma região é proporcional à densidade de linhas de campo nessa região.

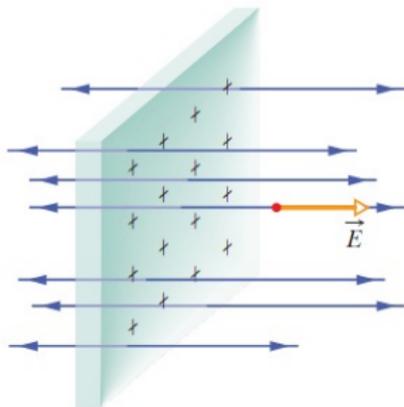


As linhas de campo elétrico se afastam das cargas positivas (onde começam) e se aproximam das cargas negativas (onde terminam).

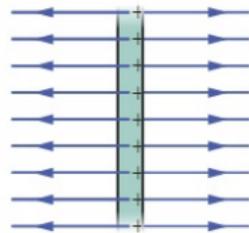




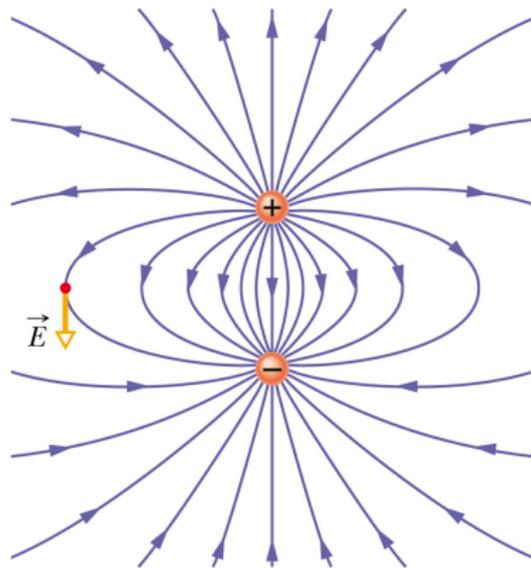
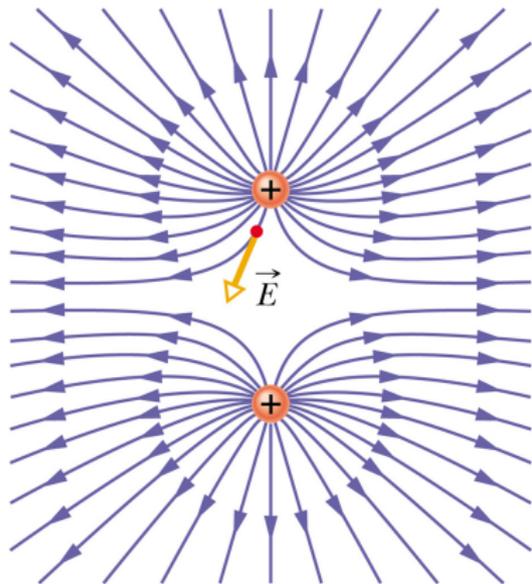
(a)



(b)



(c)

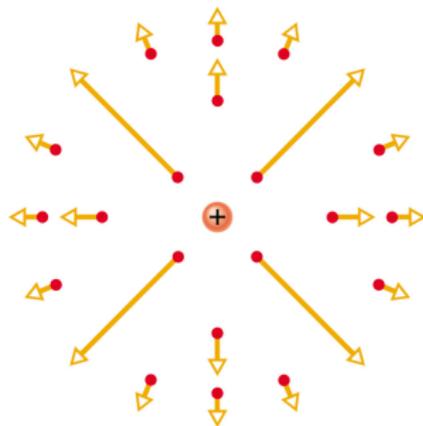


2.3 Campo Elétrico devido a uma Carga Pontual

O campo elétrico devido à presença de uma carga pontual q a uma distância r da carga é dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \text{ (carga pontual)}. \quad (2.2)$$

O sentido de \vec{E} é para longe da carga pontual se a carga é positiva e na direção da carga se esta é negativa.



O campo elétrico resultante, devido à presença de duas ou mais cargas pontuais, é a soma de todos os campos devidos a cada carga separadamente. Quando colocamos uma carga de prova positiva q_0 nas proximidades de n cargas pontuais q_1, q_2, \dots, q_n , a força total \vec{F}_0 a que a carga de prova é submetida é dada por

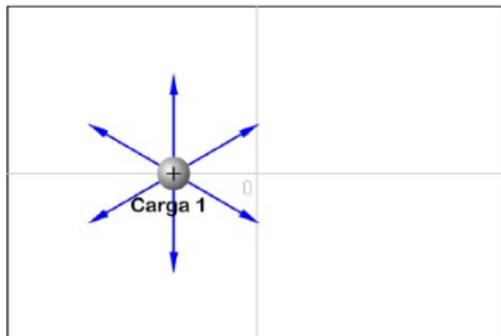
$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0n}. \quad (2.3)$$

Assim, o campo elétrico total na posição da carga de prova é dado por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{\vec{F}_{01}}{q_0} + \frac{\vec{F}_{02}}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_{0n}}{q_0} \\ &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Simulação 2.1

Campo Elétrico de uma Carga Pontual



X, m: ---

Y, m: ---

Campo elétrico. kN/C : ---

Força em cada carga, mN : 0.0

Mostrar campo total

Mostrar linhas de campo

Carga 1, microC: 2

-4 4

Carga 2, microC: 0

-4 4

Testes Conceituais

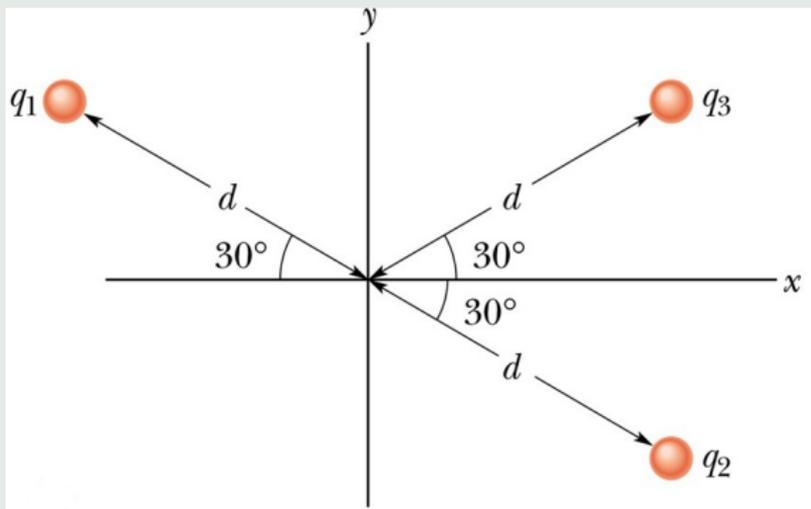
Notas

Narrativa



Exemplo 2.1

A Fig. mostra três partículas de carga $q_1 = +2Q$, $q_2 = -2Q$ e $q_3 = -4Q$, todas situadas a uma distância d da origem. Determine o campo elétrico total produzido na origem pelas três partículas?



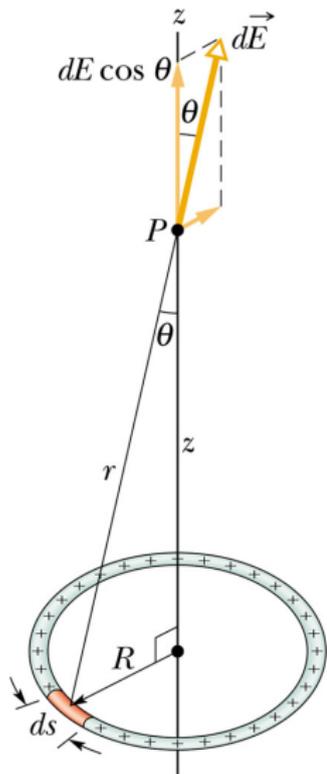
2.6 Campo Elétrico devido a um Anel Carregado

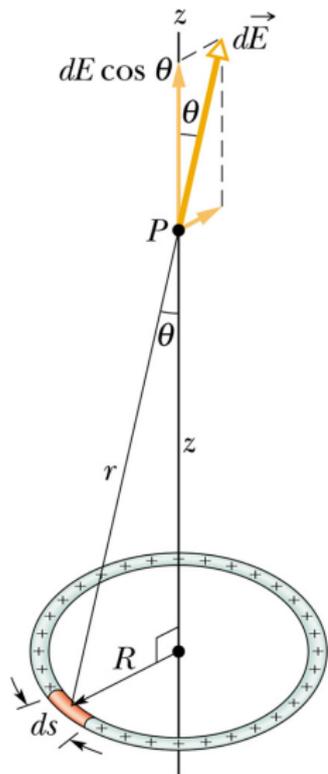
O campo produzido em P pelo elemento de carga dq é dado por

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}. \quad (2.5)$$

O campo elétrico total é obtido somando-se a contribuição de todos os elementos infinitesimais. Por simetria, o campo aponta na direção z , uma vez que as contribuições na direção radial se cancelam em pares diametralmente opostos. Desta forma,

$$\begin{aligned} E &= \int_{\text{anel}} dE \cos \theta = \\ &= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \frac{z}{r} = \\ &= \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_0^q dq = \\ &= \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \end{aligned} \quad (2.6)$$





Pela Fig., $r = \sqrt{z^2 + R^2}$. Logo, a Eq. (2.6) pode ser reescrita como

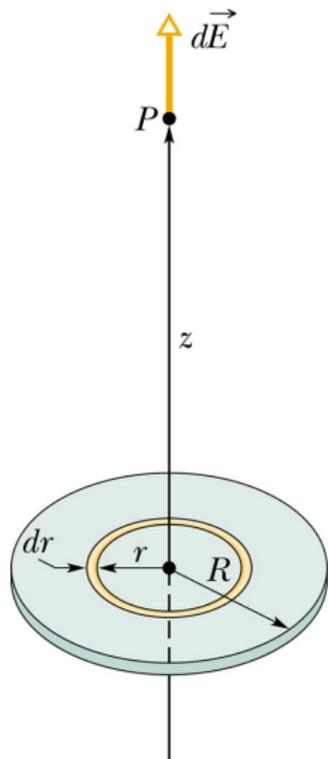
$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \text{ (anel carregado)}. \quad (2.7)$$

É interessante notar que quando $z \gg R$, temos

$$E \approx \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2}, \quad (2.8)$$

que é o campo devido uma carga pontual.

2.7 Campo Elétrico devido a um Disco Carregado



Seja um disco de raio R uniformemente carregado, com uma densidade superficial de carga σ . O campo produzido por um anel de raio r e largura dr é dado por

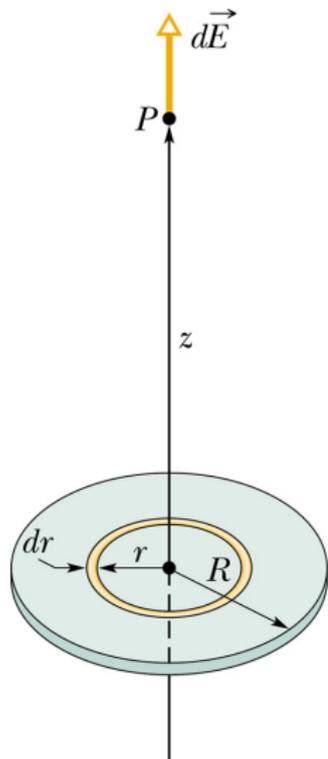
$$dE = \frac{z dq}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (2.9)$$

A carga dq contida em um elemento de área infinitesimal $dA = (2\pi r) dr$ é dada por

$$dq = \sigma dA = \sigma (2\pi r) dr. \quad (2.10)$$

Logo, temos

$$dE = \frac{\sigma z (2\pi r) dr}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (2.11)$$



Portanto, o campo total é dado por

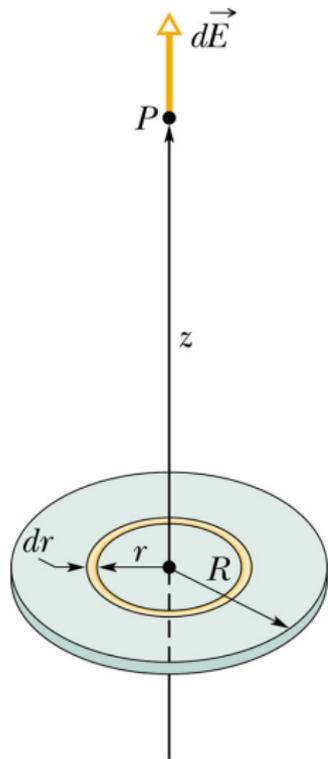
$$\begin{aligned}
 E &= \int_{\text{disco}} dE = \\
 &= \int_0^R \frac{\sigma z (2\pi r) dr}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

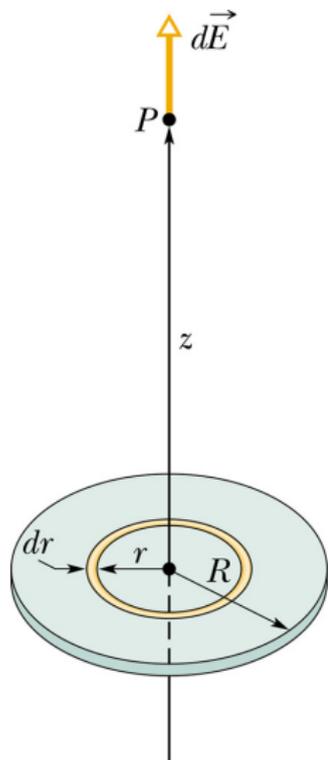
Fazendo $u = z^2 + r^2$ e $du = 2rdr$, temos

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \\
 &= \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[-\frac{2}{u^{1/2}} \right]_{z^2}^{z^2+R^2} = \\
 &= -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{u^{1/2}} \right]_{z^2}^{z^2+R^2} = \\
 &= -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{z} \right), \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \text{ (disco carregado)}. \quad (2.14)$$





Note que quando $R \rightarrow \infty$, temos

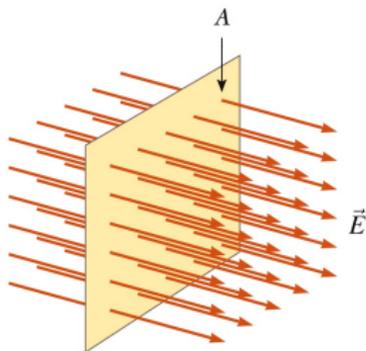
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (2.15)$$

que é o campo de uma placa infinita.

3 Lei de Gauss



3.1 Fluxo



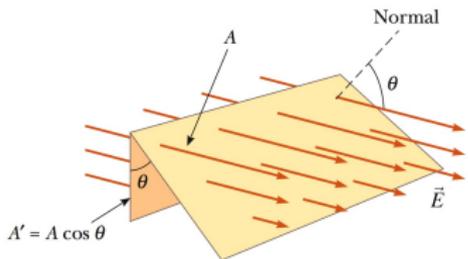
O fluxo de um campo vetorial \vec{E} constante perpendicular a uma superfície A é definido como

$$\Phi = EA. \quad (3.1)$$

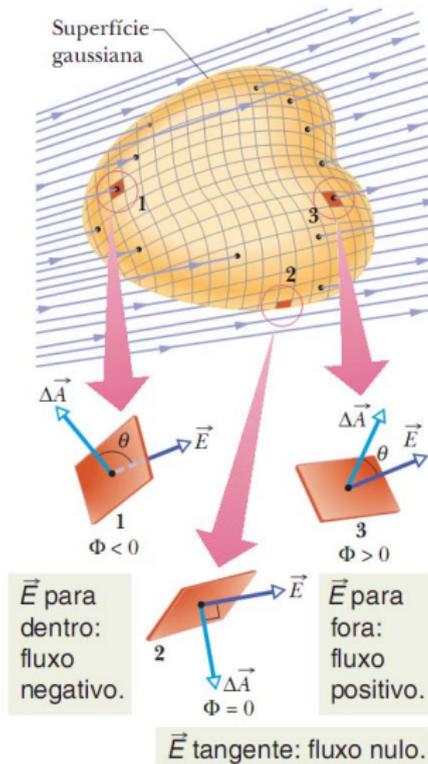
O fluxo de \vec{E} constante que forma um ângulo θ com A é definido como

$$\Phi = EA \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{A}, \quad (3.2)$$

tal que este mede o quanto o componente perpendicular do campo, $E \cos \theta$, atravessa a superfície A , ou, similarmente, o quanto o campo \vec{E} atravessa o componente normal da área, $A \cos \theta$.



3.2 Fluxo Elétrico

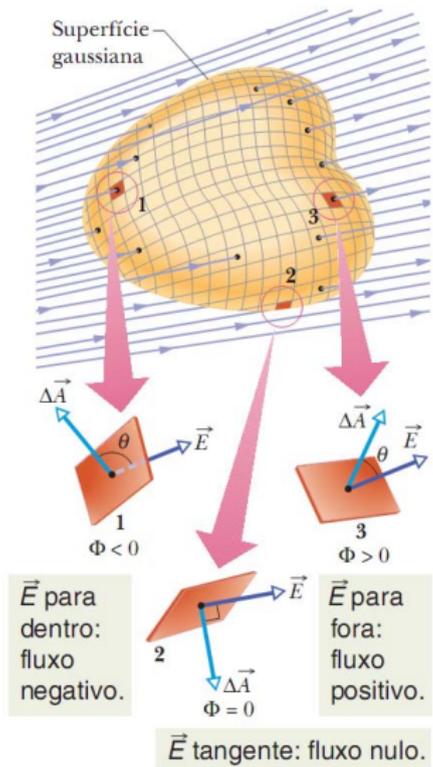


Uma superfície gaussiana é superfície imaginária fechada que envolve uma distribuição de cargas.

O fluxo elétrico através de uma superfície é proporcional ao número de linhas de campo elétrico que a atravessam perpendicularmente. Uma definição provisória do fluxo do campo elétrico para a superfície gaussiana da Fig., é dada por

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}, \quad (3.3)$$

em que \vec{E} é o campo elétrico e \vec{A} , a área através da qual o campo atravessa.

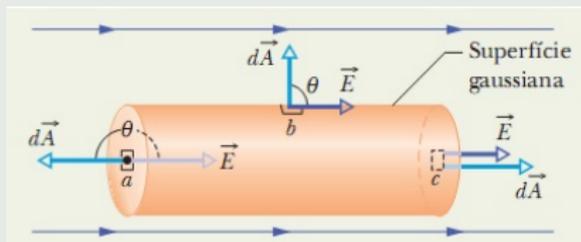


A definição exata do fluxo elétrico através de uma superfície fechada é obtida fazendo a área dos quadrados na Fig. tender a zero, tornando-se uma área infinitesimal dA . Neste caso, o somatório se torna uma integral, a qual aqui será fechada, e temos, para a definição do fluxo elétrico

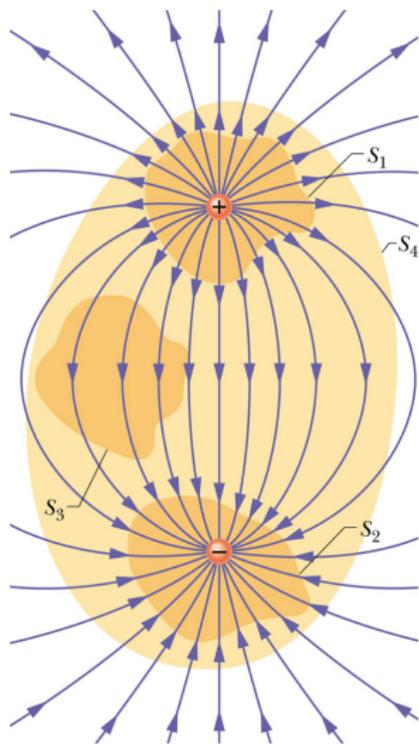
$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (3.4)$$

Exemplo 3.1

A Fig. mostra uma superfície gaussiana com a forma de um cilindro de raio R imersa em um campo elétrico uniforme \vec{E} , com o eixo do cilindro paralelo ao campo. Qual é o fluxo Φ do campo através dessa superfície fechada?



3.2 Lei de Gauss



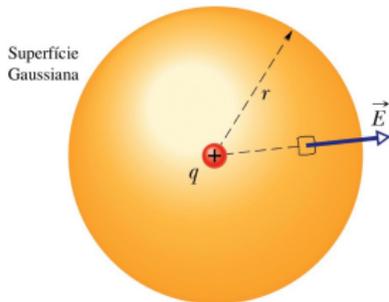
A lei de Gauss relaciona o fluxo total Φ de um campo elétrico através de uma superfície fechada (superfície gaussiana) à carga total envolvida por essa superfície q_{env} , tal que

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{env}} \text{ (lei de Gauss),} \quad (3.5)$$

podendo ser reescrita na forma

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{env}}}{\epsilon_0} \text{ (lei de Gauss).} \quad (3.6)$$

3.3 Lei de Gauss e Lei de Coulomb



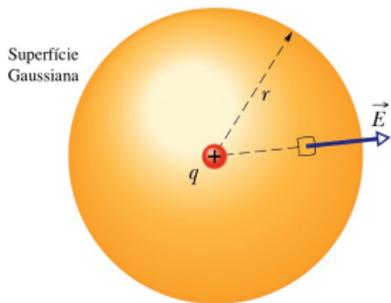
A lei de Gauss e a lei de Coulomb são formas diferentes de descrever a relação entre carga e campo elétrico em situações estáticas.

Considere uma carga positiva q . Usando a lei de Gauss para determinar o campo elétrico \vec{E} , gerado em um ponto P , distante r de q , escolhendo uma superfície gaussiana esférica de raio r , centrada em q e dividindo-a em elementos de área $d\vec{A}$, o fluxo total dado por

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad (3.7)$$

neste caso será

$$\Phi = \oiint E dA \cos 0 = \oiint E dA = E \oiint dA = E (4\pi r^2) \quad (3.8)$$



Da lei de Gauss, temos

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{env}}, \quad (3.9)$$

em que $q_{\text{env}} = q$. Desta forma, temos

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E = q, \quad (3.10)$$

o que implica em

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (3.11)$$

que é exatamente a mesma expressão obtida pela lei de Coulomb.

3.4 Aplicações da Lei de Gauss

Procedimento para Aplicação da Lei Gauss

- 1 **Faça um esquema da distribuição de cargas;**
- 2 Identifique a simetria da distribuição de cargas e o seu efeito nos campos elétricos;
- 3 Escolha preferencialmente uma superfície gaussiana de acordo com a simetria da distribuição de cargas;
- 4 Use a lei de Gauss para determinar o vetor campo elétrico:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{env}}}{\epsilon_0}. \quad (3.12)$$

3.4 Aplicações da Lei de Gauss

Procedimento para Aplicação da Lei Gauss

- 1 Faça um esquema da distribuição de cargas;
- 2 **Identifique a simetria da distribuição de cargas e o seu efeito nos campos elétricos;**
- 3 Escolha preferencialmente uma superfície gaussiana de acordo com a simetria da distribuição de cargas;
- 4 Use a lei de Gauss para determinar o vetor campo elétrico:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{env}}}{\epsilon_0}. \quad (3.12)$$

3.4 Aplicações da Lei de Gauss

Procedimento para Aplicação da Lei Gauss

- 1 Faça um esquema da distribuição de cargas;
- 2 Identifique a simetria da distribuição de cargas e o seu efeito nos campos elétricos;
- 3 Escolha preferencialmente uma superfície gaussiana de acordo com a simetria da distribuição de cargas;
- 4 Use a lei de Gauss para determinar o vetor campo elétrico:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{env}}}{\epsilon_0}. \quad (3.12)$$

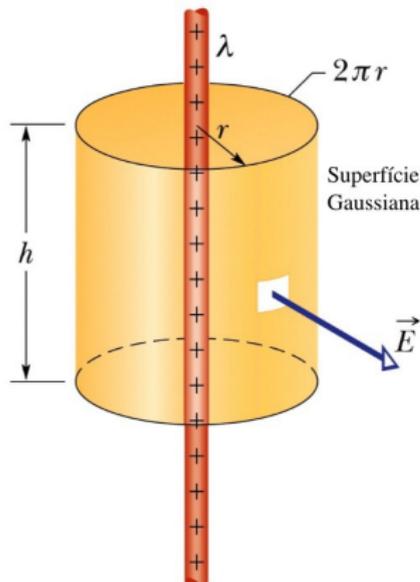
3.4 Aplicações da Lei de Gauss

Procedimento para Aplicação da Lei Gauss

- 1 Faça um esquema da distribuição de cargas;
- 2 Identifique a simetria da distribuição de cargas e o seu efeito nos campos elétricos;
- 3 Escolha preferencialmente uma superfície gaussiana de acordo com a simetria da distribuição de cargas;
- 4 Use a lei de Gauss para determinar o vetor campo elétrico:

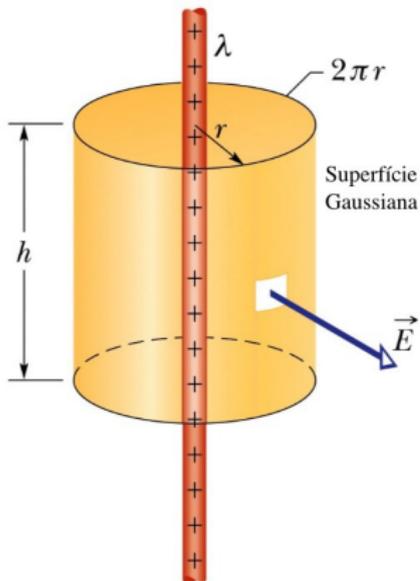
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{env}}}{\epsilon_0}. \quad (3.12)$$

3.4.1 Aplicação da Lei de Gauss: Simetria Cilíndrica



Seja uma linha de carga infinita com densidade linear de carga positiva λ (Fig.). Aplicando a lei de Gauss na superfície gaussiana mostrada na Fig., obtemos

$$\begin{aligned}\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore \oiint E dA \cos 0 &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore \oiint E dA &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore E \oiint dA &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore E (2\pi r h) &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore E &= \frac{q}{2\pi r h \epsilon_0}. \quad (3.13)\end{aligned}$$

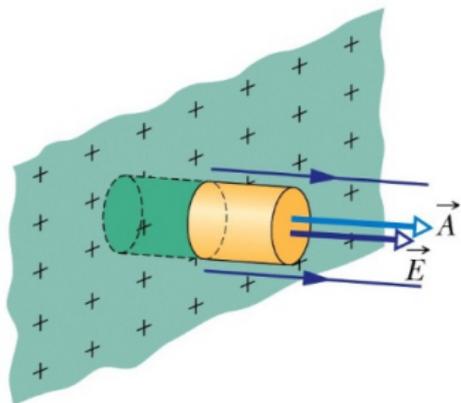


Como neste caso, $q = \lambda h$, temos

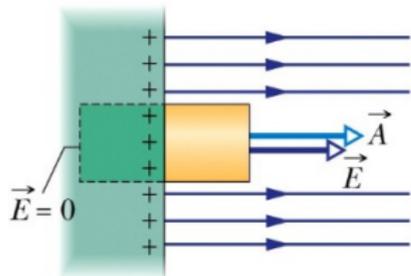
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ (linha de cargas).} \quad (3.14)$$

3.4.2 Aplicação da Lei de Gauss: Simetria Planar

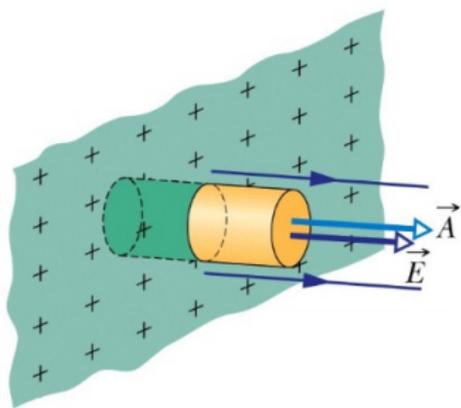
Superfície Plana Condutora



Seja uma superfície plana infinita condutora com densidade superficial de carga positiva σ (Fig.). Neste caso, toda a carga se concentra na superfície e o campo no interior é nulo. Aplicando a lei de Gauss na superfície gaussiana mostrada na Fig., obtemos

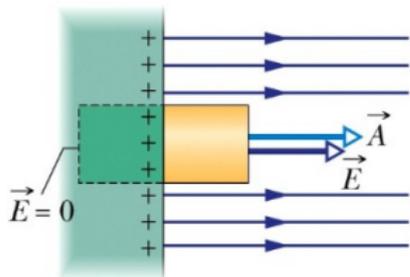


$$\begin{aligned}\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore \oiint E dA &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore EA &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore E &= \frac{q}{A\epsilon_0}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

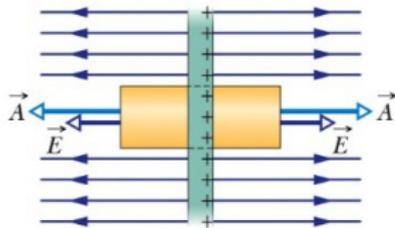
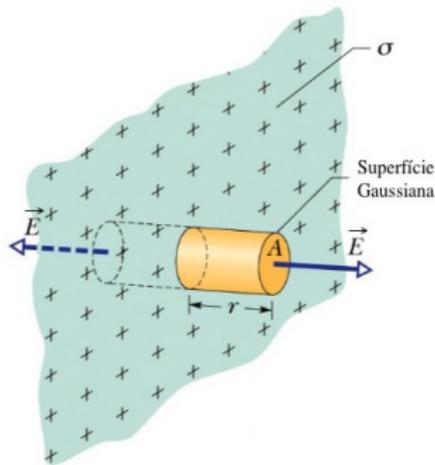


Como neste caso, $q = \sigma A$, temos

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ (superfície plana condutora)}. \quad (3.16)$$

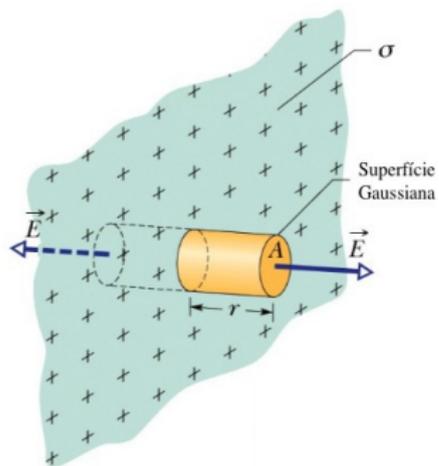


Placa Isolante



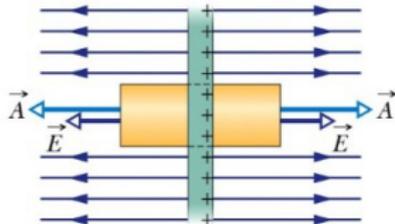
Seja uma placa plana infinita não-condutora com densidade superficial de carga positiva σ (Fig.). Aplicando a lei de Gauss na superfície gaussiana mostrada na Fig., obtemos

$$\begin{aligned}\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore \oiint E dA &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore EA + EA &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore 2EA &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore E &= \frac{q}{2A\epsilon_0}, \quad (3.17)\end{aligned}$$



o que implica em

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ (placa isolante)}. \quad (3.18)$$



3.4.3 Aplicação da Lei de Gauss: Simetria Esférica

Casca Esférica

Seja uma casca esférica fina de raio R e carga total q .

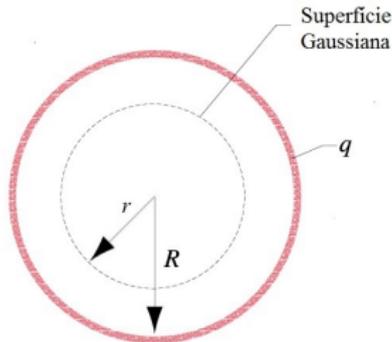
Dentro da Casca:

Considere uma superfície gaussiana concêntrica interior à casca esférica (Fig.). Pela lei de Gauss, temos

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{env}}}{\epsilon_0} = 0, \quad (3.19)$$

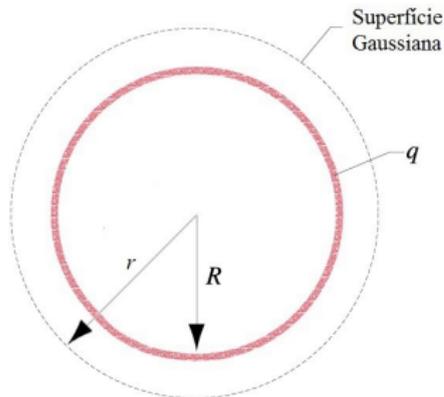
visto que a carga envolvida q_{env} pela superfície gaussiana no interior é nula. Deste modo,

$$E = 0 \text{ (casca esférica, } r < R\text{)}. \quad (3.20)$$



Fora da Casca:

Considere uma superfície gaussiana concêntrica exterior à casca esférica (Fig.). Pela lei de Gauss, temos



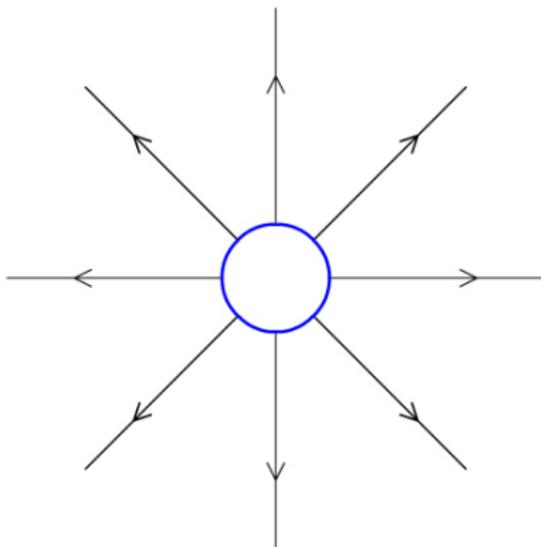
$$\begin{aligned}\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{q_{\text{env}}}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore \oiint E dA &= \frac{q}{\epsilon_0} \therefore \\ \therefore E (4\pi r^2) &= \frac{q}{\epsilon_0},\end{aligned}$$

o que nos dá

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ (casca esférica, } r \geq R). \quad (3.21)$$

Simulação 3.1

Lei de Gauss



X= -3.3 m
Y= -1.33 m
E= 1420 N/C

Carga da esfera interna: μC Carga da esfera externa: μC Carga da partícula central: μC



Testes Conceituais

Notas

Narrativa

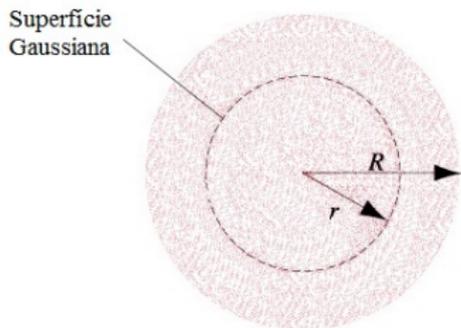


Esfera Uniformemente Carregada

Seja uma esfera uniformemente carregada de raio R e carga total q .

Dentro da Esfera:

Considere uma superfície gaussiana esférica de raio $r \leq R$ (Fig.). Pela lei de Gauss, temos



$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{env}}}{\epsilon_0} \therefore$$
$$\therefore \oiint E dA = \frac{q'}{\epsilon_0},$$

em que q' é a carga envolvida pela superfície gaussiana. Desta forma, temos

$$E (4\pi r^2) = \frac{q'}{\epsilon_0},$$

implicando em

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2} \text{ (distrib. esférica, } r \leq R). \quad (3.22)$$

Como a distribuição esférica de cargas é uniforme, temos

$$\frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

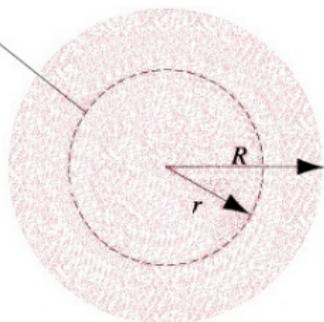
da qual temos

$$q' = q \frac{r^3}{R^3}. \quad (3.23)$$

Substituindo em (3.22), temos

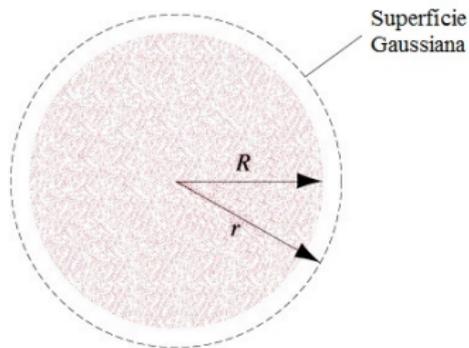
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \text{ (distrib. esférica, } r \leq R). \quad (3.24)$$

Superfície
Gaussiana



Fora da Esfera:

Considere uma superfície gaussiana esférica de raio $r \geq R$ (Fig.). Pela lei de Gauss, temos

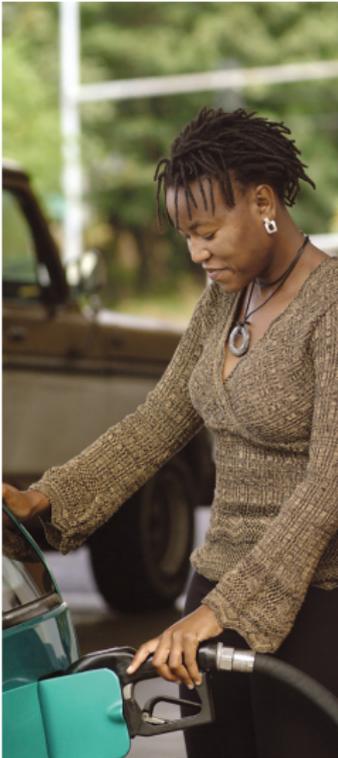


$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{env}}}{\epsilon_0} \therefore$$
$$\therefore \oiint E dA = \frac{q}{\epsilon_0} \therefore$$
$$\therefore E (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0},$$

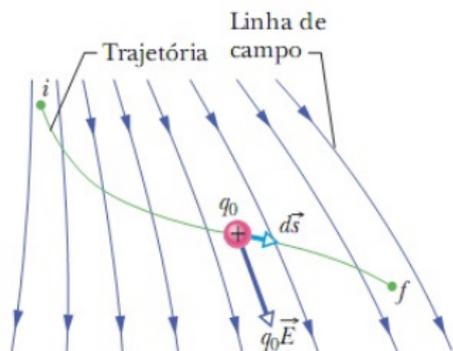
o que nos dá

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ (distrib. esférica, } r \geq R). \quad (3.25)$$

4 Potencial Eléctrico



4.1 Energia Potencial Elétrica



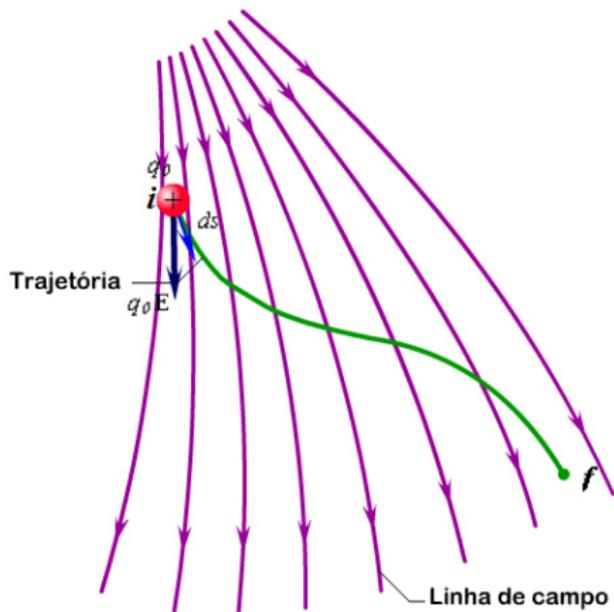
A variação da energia potencial elétrica U de uma carga pontual quando esta se desloca de um ponto inicial i a um ponto final f na presença de um campo elétrico é dada por

$$\Delta U = U_f - U_i = -W, \quad (4.1)$$

em que W é o trabalho realizado pela força eletrostática, que é conservativa, sobre a carga pontual durante o deslocamento.

Simulação 4.1

Energia Potencial Elétrica



Testes Conceituais

Notas

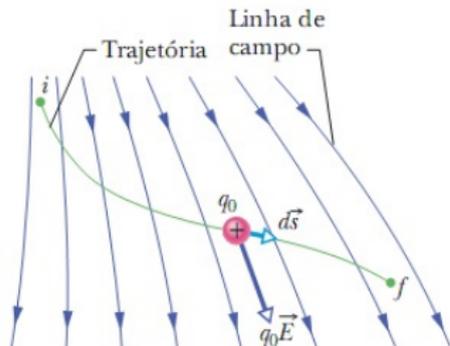
Narrativa



4.2 Potencial Elétrico

O potencial elétrico pode ser escrito em termos da energia potencial elétrica de uma partícula de carga q_0 na presença de um campo elétrico como

$$V = \frac{U}{q_0}. \quad (4.2)$$



Da mesma forma, a diferença de potencial (ddp) de uma carga pontual quando esta se desloca de um ponto inicial i a um ponto final f na presença de um campo elétrico é dada por

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f}{q_0} - \frac{U_i}{q_0} = \frac{\Delta U}{q_0}. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.1) em (4.3), temos

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W}{q_0}. \quad (4.4)$$

Unidade no SI: $J/C \equiv V$ (volt)

4.3 Cálculo do Potencial a Partir do Campo

O trabalho total para a carga q_0 se deslocar de i a f na presença de um campo elétrico é dado por

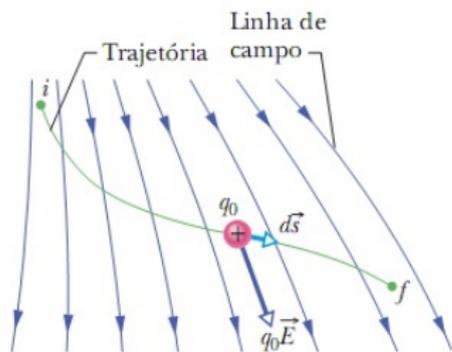
$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (4.5)$$

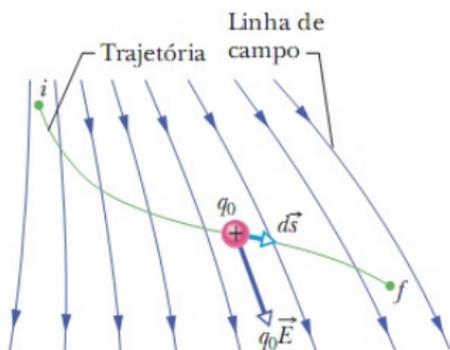
Como, neste caso, a força exercida sobre a carga é

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}, \quad (4.6)$$

temos

$$W = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (4.7)$$





Substituindo (4.7) em (4.4), temos

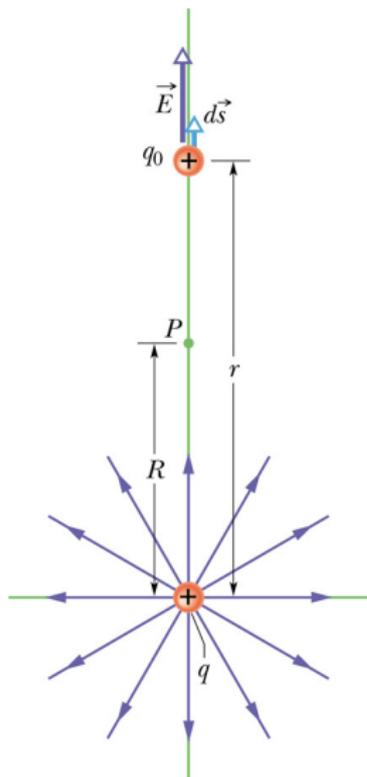
$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (4.8)$$

Se o ponto i estiver no infinito, com $V_i = 0$, temos

$$V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (4.9)$$

que é o potencial em qualquer ponto f em relação àquele no ponto i .

4.4 Potencial Produzido por uma Carga Pontual

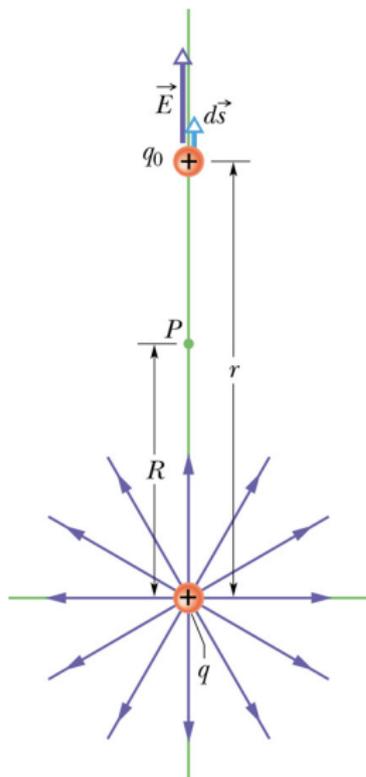


Considere um ponto P situado a uma distância R de uma partícula fixa de carga positiva q . Imagine que uma carga de prova positiva q_0 é deslocada do ponto P até o infinito. Como a trajetória seguida pela carga de prova é irrelevante, podemos escolher a mais simples: uma reta que liga a partícula fixa ao ponto P e se estende até o infinito. Nesse caso, temos

$$V_f - V_i = - \int_R^{\infty} E dr. \quad (4.10)$$

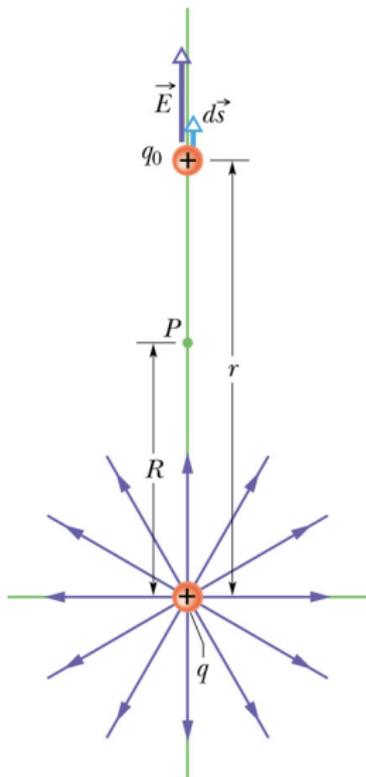
Considerando que $V_f = 0$ (no infinito) e $V_i = V$ (em R) e sabendo que o módulo do campo elétrico no ponto onde se encontra a carga de prova é

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (4.11)$$



temos

$$\begin{aligned}
 0 - V &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \therefore \\
 \therefore -V &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty \therefore \\
 \therefore -V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_R^\infty \therefore \\
 \therefore -V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right) \therefore \\
 \therefore -V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(0 - \frac{1}{R} \right) \therefore \\
 \therefore V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.
 \end{aligned}$$



Substituindo R por r , temos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (4.12)$$

Uma partícula carregada positivamente produz um potencial elétrico positivo. Uma partícula carregada negativamente produz um potencial elétrico negativo.

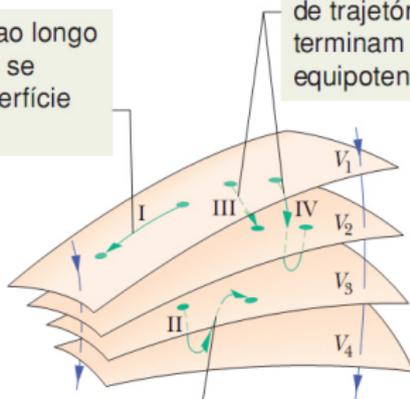
4.5 Superfícies Equipotenciais

Superfícies equipotenciais são aquelas cujos pontos possuem o mesmo potencial elétrico.

Quando uma partícula carregada é deslocada de um ponto para outro de uma superfície equipotencial, o trabalho realizado pelo campo elétrico é nulo.

O trabalho realizado ao longo de uma trajetória que se mantém em uma superfície equipotencial é nulo.

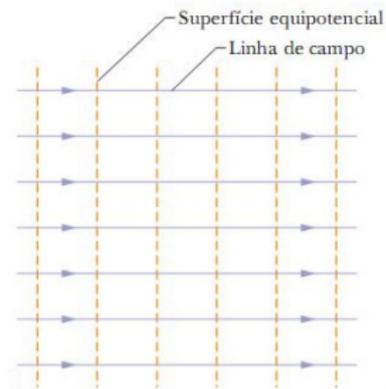
Os trabalhos realizados ao longo de trajetórias que começam e terminam nas mesmas superfícies equipotenciais são iguais.



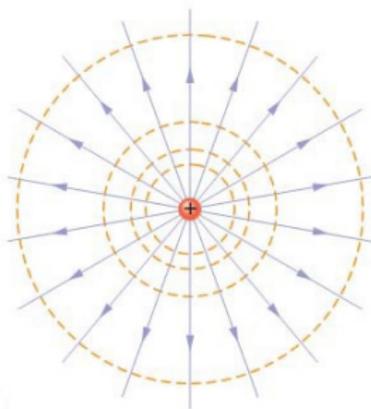
O trabalho realizado ao longo de uma trajetória que começa e termina na mesma superfície equipotencial é nulo.

Exemplos de Superfícies Equipotenciais

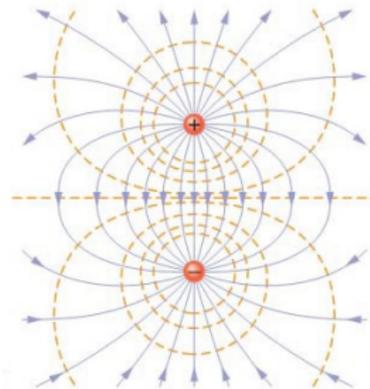
Campo Elétrico Uniforme



Carga Pontual

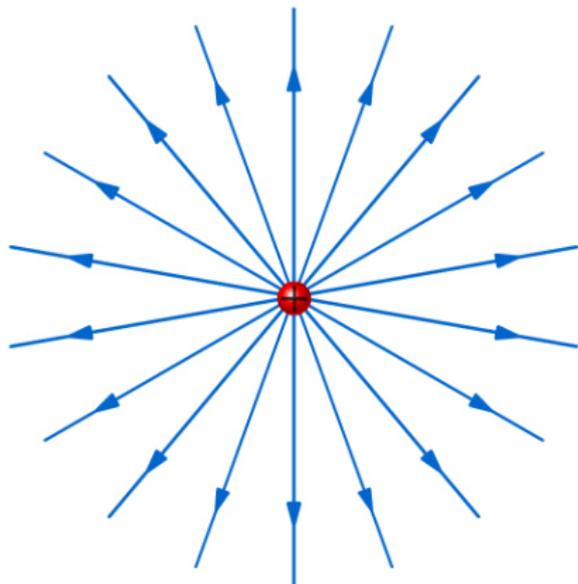


Dipolo Elétrico



Simulação 4.2

Linhas de Campo Elétrico e Superfícies Equipotenciais



+

-

Linhas de Campo Elétrico

Superfícies Equipotenciais

Ambas

Testes Conceituais

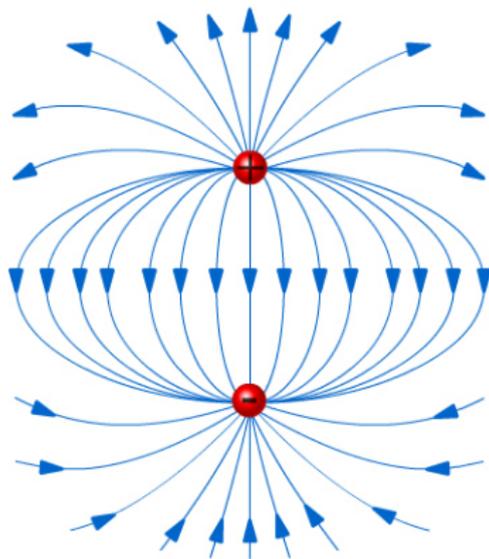
Notas

Narrativa



Simulação 4.3

Dipolo Elétrico



Dipolo

Iguais

Linhas de Campo Elétrico

Superfícies Equipotenciais

Ambas

Testes Conceituais

Notas

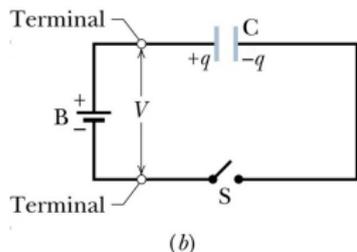
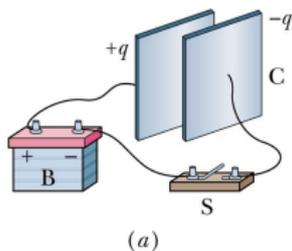
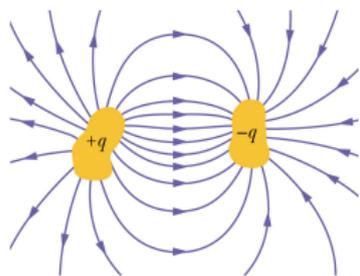
Narrativa



5 Capacitância



5.1 Capacitores e Capacitância



Capacitor é um sistema constituído por um par de condutores isolados com cargas opostas, usado para armazenar energia.

A capacitância de um capacitor de cargas q e $-q$ nas suas placas é definida por

$$C = \frac{q}{V}, \quad (5.1)$$

em que V é a diferença de potencial entre as suas placas. A capacitância depende apenas da geometria do capacitor e do material entre os seus condutores.

Unidade no SI: $C/V \equiv F$ (farad)

5.2 Associação de Capacitores

Associação em Paralelo

Neste caso, temos

$$q_1 = C_1V, \quad q_2 = C_2V \text{ e } q_3 = C_3V. \quad (5.2)$$

Sabendo que a carga total é $q = q_1 + q_2 + q_3$, temos

$$q = C_1V + C_2V + C_3V. \quad (5.3)$$

Como, da Fig., $q = C_{\text{eq}}V$, temos

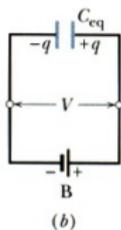
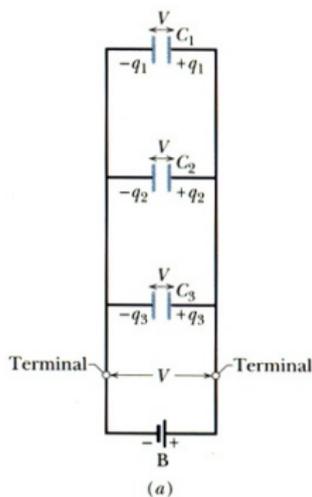
$$C_{\text{eq}}V = C_1V + C_2V + C_3V, \quad (5.4)$$

implicando em

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3. \quad (5.5)$$

Generalizando para n capacitores, temos

$$C_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (5.6)$$



Associação em Série

Neste caso, temos

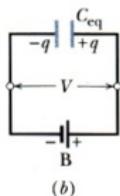
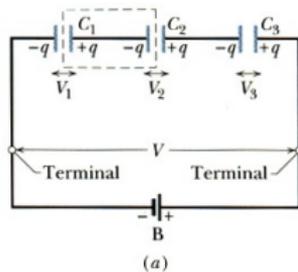
$$q = C_1 V_1, \quad q = C_2 V_2 \text{ e } q = C_3 V_3. \quad (5.7)$$

Sabendo que a ddp total é $V = V_1 + V_2 + V_3$, temos

$$V = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}. \quad (5.8)$$

Como, da Fig., $V = \frac{q}{C_{\text{eq}}}$, temos

$$\frac{q}{C_{\text{eq}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}, \quad (5.9)$$



implicando em

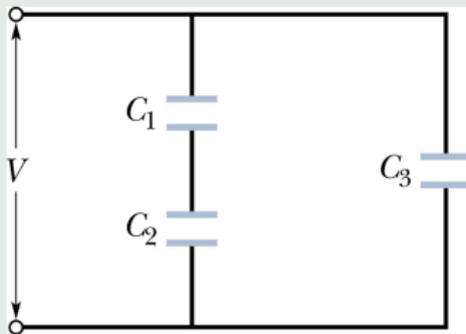
$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \quad (5.10)$$

Generalizando para n capacitores, temos

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (5.11)$$

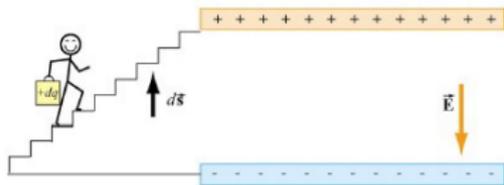
Exemplo 5.1

Determine a capacitância equivalente do circuito da Fig. para $C_1 = 10,0 \mu\text{F}$, $C_2 = 5,00 \mu\text{F}$ e $C_3 = 4,00 \mu\text{F}$.



5.3 Energia Armazenada em um Campo Elétrico

Um agente externo deve realizar trabalho para carregar um capacitor. Este trabalho fica armazenado sob a forma de energia potencial na região do campo elétrico entre as placas.



Suponha que as cargas q' e $-q'$ estejam armazenadas nas placas de um capacitor. O trabalho para se deslocar uma carga elementar dq' de uma placa para a outra é

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'. \quad (5.12)$$

Integrando (5.12), temos

$$W = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}. \quad (5.13)$$

Como o trabalho realizado é armazenado na forma da energia potencial U_E do capacitor, temos

$$U_E = \frac{q^2}{2C}. \quad (5.14)$$

Exemplo 5.2

Qual é a capacitância necessária para armazenar uma energia de $10 \text{ kW} \cdot \text{h}$ com uma diferença de potencial de 1000 V ?

6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



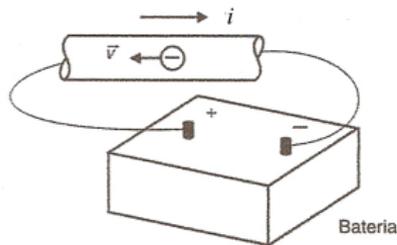
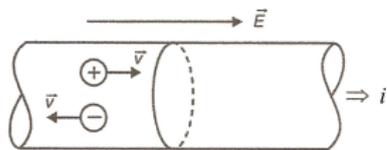
6 Corrente e Resistência



6 Corrente e Resistência



6.1 Corrente Elétrica



A corrente elétrica em um condutor é definida por

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ (corrente elétrica),} \quad (6.1)$$

em que dq é a carga (positiva) que atravessa uma seção reta em um condutor durante um intervalo de tempo dt .

Sentido da corrente:

verdadeiro: do - para o +

convencional: do + para o -

Unidade no SI: $C/s \equiv A$ (ampère)

6.2 Densidade de Corrente Elétrica

A corrente elétrica (uma grandeza escalar) está relacionada à densidade de corrente elétrica \vec{J} (uma grandeza vetorial) através da equação

$$i = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad (6.2)$$

em que $d\vec{A}$ é um vetor perpendicular ao elemento de área dA . Se a corrente é uniforme em toda a superfície e paralela a $d\vec{A}$, \vec{J} também será. Nesse caso, temos

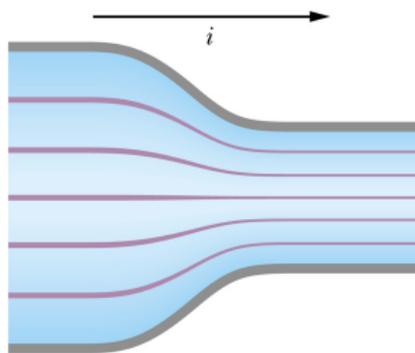
$$i = \iint J dA = J \iint dA = JA, \quad (6.3)$$

e, portanto,

$$J = \frac{i}{A}, \quad (6.4)$$

em que A é a área total da superfície.

Unidade no SI: A/m^2



Velocidade de Deriva de Portadores de Carga

Quando um campo elétrico \vec{E} é estabelecido em um condutor, os portadores de carga (tomados como positivos) adquirem uma velocidade \vec{v}_d no mesmo sentido de \vec{E} .

Partindo de

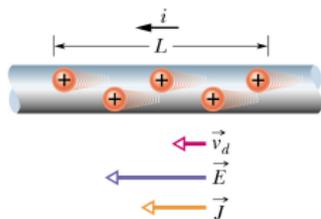
$$J = \frac{i}{A}, \quad (6.5)$$

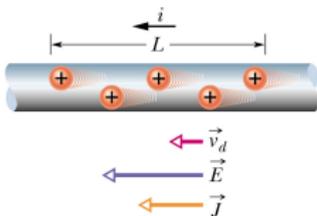
sabendo que

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (6.6)$$

temos

$$J = \frac{dq}{dt} \frac{1}{A} = \frac{dq}{dt} \frac{1}{A} \frac{dx}{dx} = \frac{dq}{Adx} \frac{dx}{dt}. \quad (6.7)$$





Sabendo que $dV = Adx$ é o volume imaginário pelo qual passam os portadores de carga e, também, que $v_d = \frac{dx}{dt}$, temos

$$J = \frac{dq}{dV} v_d, \quad (6.8)$$

o que implica em

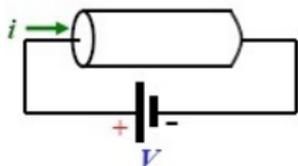
$$J = \rho v_d, \quad (6.9)$$

em que $\rho = \frac{dq}{dV}$ é a densidade volumétrica de carga dos portadores. Vetorialmente, temos

$$\vec{J} = \rho \vec{v}_d. \quad (6.10)$$

6.3 Resistência e Resistividade

Resistência



R

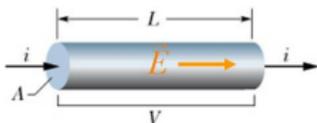
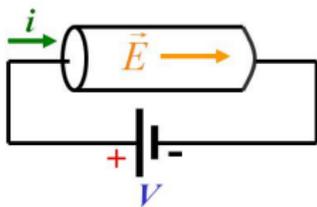


A resistência elétrica de um material é dada pela razão entre a ddp V entre dois pontos deste material e a corrente que o atravessa, tal que

$$R = \frac{V}{i}. \quad (6.11)$$

Unidade no SI: $V/A \equiv \Omega$ (ohm)

Resistividade



A condutividade de um material é definida por

$$\sigma = \frac{J}{E}. \quad (6.12)$$

o que implica, vetorialmente, em

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (6.13)$$

A resistividade é o inverso da condutividade, dada por

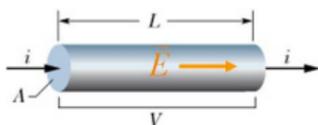
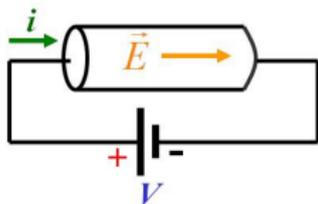
$$\rho = \frac{1}{\sigma}. \quad (6.14)$$

implicando em

$$\vec{E} = \rho \vec{J}. \quad (6.15)$$

Obs.: Não confundir $\rho = \frac{1}{\sigma}$ com a densidade de carga elétrica, também dada pela mesma letra.

Cálculo da Resistência a Partir da Resistividade



Considerando o condutor mostrado na Fig., o campo elétrico em seu interior é $E = \frac{V}{L}$. A densidade de corrente é $J = \frac{i}{A}$. Substituindo em $\rho = \frac{E}{J}$, temos

$$\rho = \frac{\frac{V}{L}}{\frac{i}{A}} = \frac{VA}{iL} = R\frac{A}{L}, \quad (6.16)$$

o que implica em

$$R = \rho \frac{L}{A}. \quad (6.17)$$

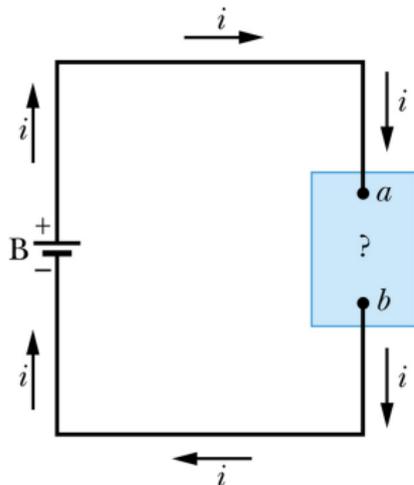
Enquanto a resistência é uma propriedade de um dispositivo, a resistividade é a propriedade de um material.

A lei de Ohm é dada por

$$R = \frac{V}{i}. \quad (6.18)$$

Se $\frac{V}{i} = \text{cte}$, o resistor é denominado ohmico.

6.5 Potência em Circuitos Elétricos



A quantidade de carga que passa por um circuito em um intervalo de tempo dt é $dq = idt$. A energia potencial de uma carga dq ao completar o circuito, levando um intervalo de tempo dt , é reduzida de uma quantidade

$$dU = Vdq, \quad (6.19)$$

em que $V = V_a - V_b$ é a ddp entre os pontos a e b . A potência associada à transferência de energia, dada por

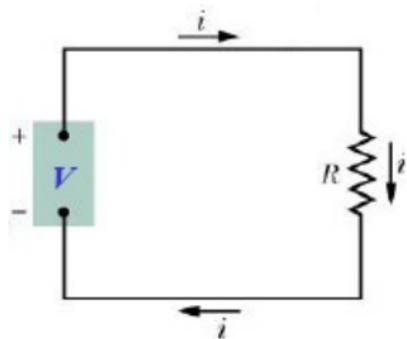
$$P = \frac{dU}{dt}, \quad (6.20)$$

pode ser expressa na forma

$$P = Vi. \quad (6.21)$$

Unidade no SI: $V \cdot A \equiv W$ (watt)

Dissipação Resistiva (Efeito Joule)



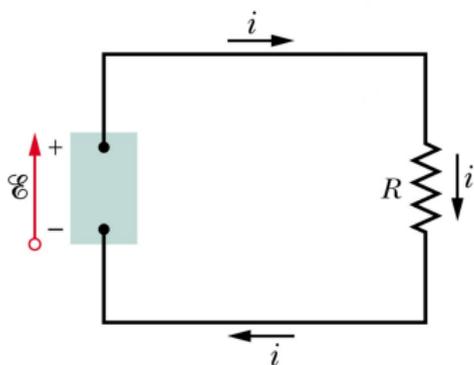
No caso de um resistor, a potência pode ser dada por

$$P = Ri^2, \quad (6.22)$$

ou, ainda, por

$$P = \frac{V^2}{R}. \quad (6.23)$$

6.6 Força Eletromotriz



Uma fonte de tensão realiza um trabalho sobre cargas elétricas para manter uma ddp entre os terminais. Se dW é o trabalho realizado pela fonte para transportar uma carga positiva dq do terminal negativo para o positivo, a força eletromotriz (fem) da fonte é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq}. \quad (6.24)$$

Unidade no SI: V (volt)

Enquanto uma fonte real possui resistência interna, uma fonte ideal não possui.

6.7 Semicondutores

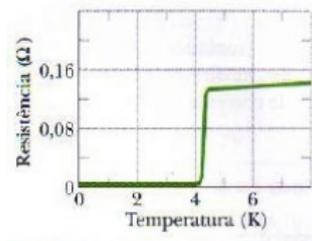
Semicondutores são materiais que possuem um número relativamente pequeno de elétrons de condução, mas se tornam bons condutores quando são dopados com outros átomos que fornecem elétrons livres.

Algumas Propriedades Elétricas do Cobre e do Silício

Propriedade	Cobre	Silício
Tipo de material	Metal	Semicondutor
Densidade de portadores de carga, m^{-3}	$8,49 \times 10^{28}$	1×10^{16}
Resistividade, $\Omega \cdot m$	$1,69 \times 10^{-8}$	$2,5 \times 10^3$
Coefficiente de temperatura da resistividade, K^{-1}	$+4,3 \times 10^{-3}$	-70×10^{-3}

6.8 Supercondutores

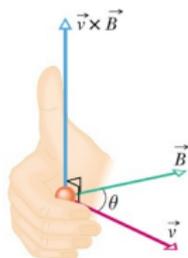
Supercondutores são materiais que perdem totalmente a resistência elétrica em baixas temperaturas. Recentemente foram descobertos materiais que se tornam supercondutores em temperaturas relativamente elevadas.



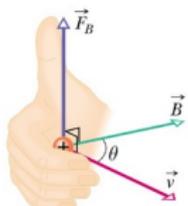
7 Campo Magnético



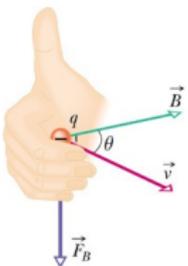
7.1 Campo Magnético



(a)



(b)



(c)

O campo magnético \vec{B} é definido em termos da força magnética \vec{F}_B que age sobre uma carga de prova q que está se movendo com velocidade \vec{v} na presença do campo, tal que

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (7.1)$$

Unidade de \vec{B} no SI: $\frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}} \equiv \text{T}$ (tesla)

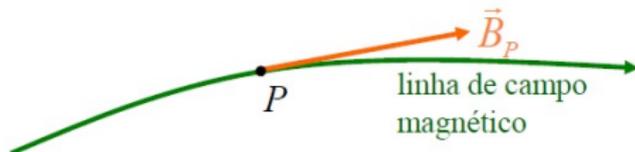
Alguns Campos Magnéticos

Na superfície de uma estrela de nêutrons	10^8 T
Perto de um grande eletroímã	1,5 T
Perto de um ímã pequeno	10^{-2} T
Na superfície da Terra	10^{-4} T
No espaço sideral	10^{-10} T
Em uma sala magneticamente blindada	10^{-14} T

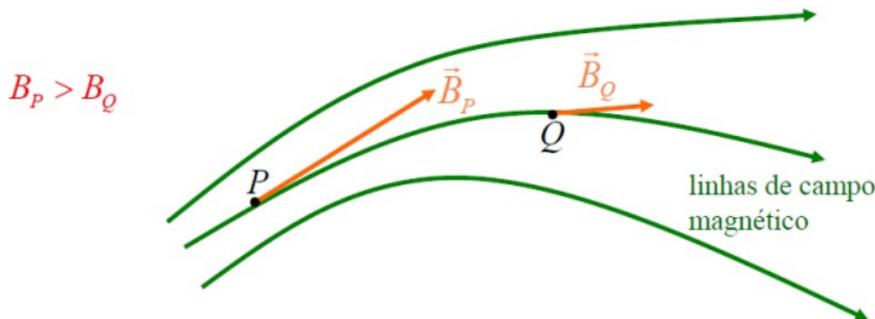
7.2 Linhas de Campo Magnético

As linhas de campo magnético são usadas para visualizar a orientação e a intensidade do campo magnético.

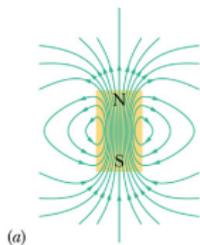
- 1 O vetor campo magnético em qualquer ponto do espaço é tangente à linha que passa por esse ponto.



- 2 O módulo do vetor campo magnético em uma região é proporcional à densidade de linhas de campo nessa região.



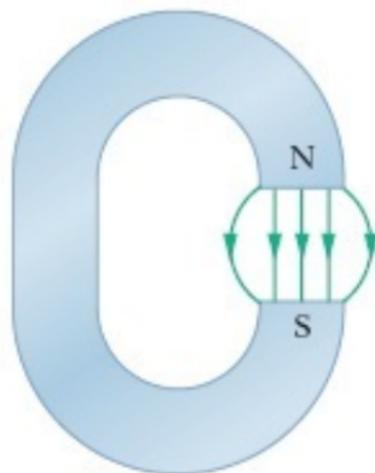
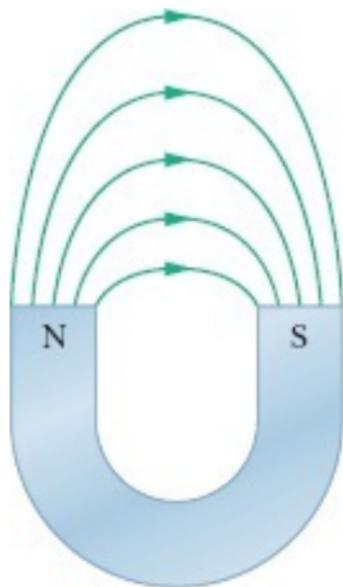
As linhas de campo magnético vão do polo norte para o polo sul.



(a)

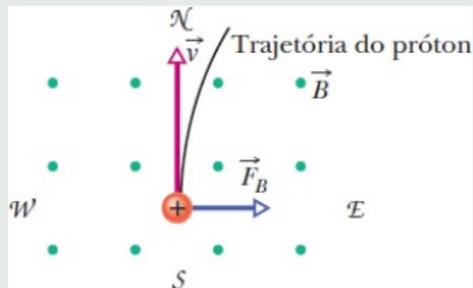


(b)



Exemplo 7.1

No interior de uma câmara de laboratório existe um campo magnético uniforme \vec{B} , de módulo 1,2 mT, orientado verticalmente para cima. Um próton com uma velocidade de $3,2 \times 10^7$ m/s entra na câmara movendo-se para o norte. Qual é a força experimentada pelo próton ao entrar na câmara?



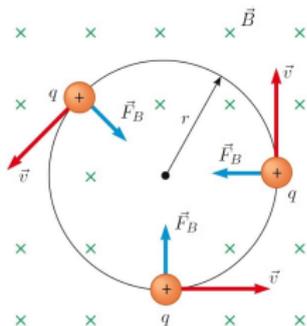
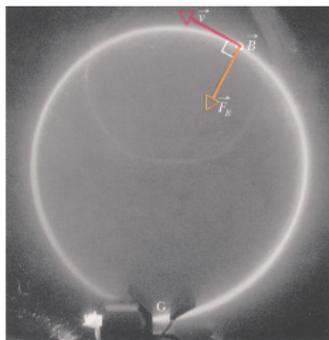
7.3 Movimento de uma Partícula Carregada em um Campo Magnético Uniforme

Considere uma carga positiva q com massa m e velocidade \vec{v} perpendicular a um campo magnético uniforme \vec{B} . Neste caso, a força magnética é uma força centrípeta e a carga realiza um MCU. Sendo r o raio da órbita circular, temos

$$qvB = m\frac{v^2}{r}, \quad (7.2)$$

o que nos dá

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (7.3)$$



O período de é dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (7.4)$$

A frequência é dada por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}. \quad (7.5)$$

A frequência angular é dada por

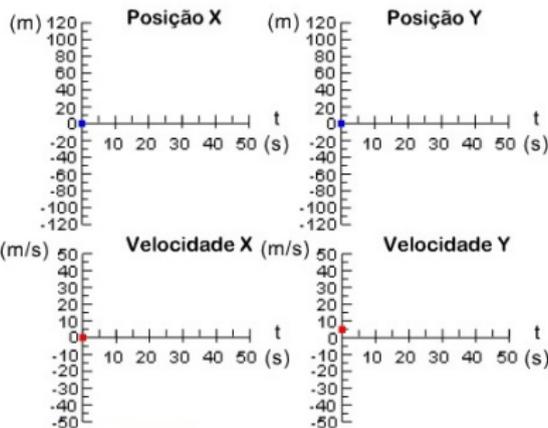
$$\omega = 2\pi f = \frac{qB}{m}. \quad (7.6)$$

Exemplo 7.2

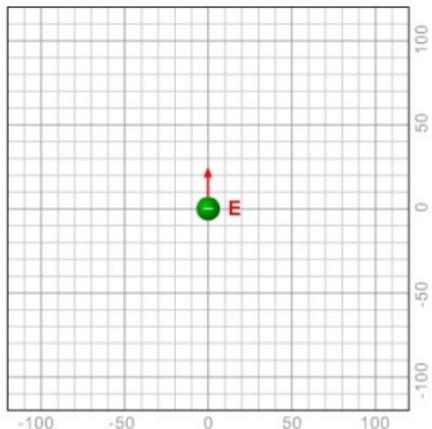
A partícula alfa, que é produzida em alguns decaimentos radioativos de núcleos atômicos, é formada por dois prótons e dois nêutrons. A partícula tem uma carga $q = 2e$ e uma massa de $4,00 \text{ u}$, em que u é a unidade de massa atômica ($1 \text{ u} = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}$). Suponha que uma partícula alfa descreva uma trajetória circular de raio $4,50 \text{ cm}$ na presença de um campo magnético uniforme de módulo igual a $1,20 \text{ T}$. Determine (a) a velocidade e (b) o período de revolução da partícula.

Simulação 7.1

Movimento de uma Carga em Campos Elétricos e Magnéticos



X, m: Y, m:



Apagar

Carga, microC:
-100 100

Campo magnético, T:
0 2

Velocidade X inicial, m/s:
0 8

Massa $\times 10^{-5}$ kg:
1 10

Campo elétrico, V/m:
-4 4

Velocidade Y inicial, m/s:
0 8

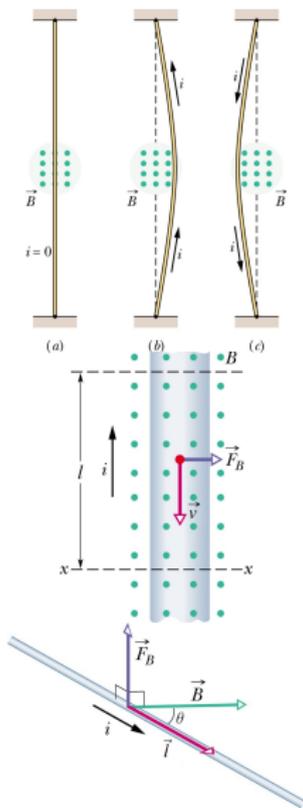
Testes Conceituais

Notas

Narrativa



7.4 Força Magnética em um Fio Percorrido por uma Corrente



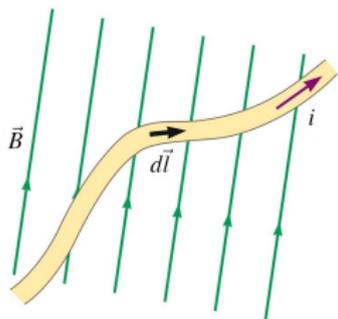
Considere um trecho de fio de comprimento l . Todos os elétrons de condução, cuja velocidade de deriva é \vec{v} , passam pelo plano xx da Fig., após um intervalo de tempo $t = \frac{l}{v}$. Assim, nesse intervalo de tempo, uma carga dada por

$$q = it = i \frac{l}{v} \quad (7.7)$$

passa pelo plano xx . Neste caso, de acordo com a Eq. (7.1), temos

$$\vec{F}_B = i\vec{l} \times \vec{B}, \quad (7.8)$$

em que \vec{l} é um vetor comprimento de módulo l , cuja direção é a mesma que o trecho de fio e o sentido, o convencional da corrente.



No caso de o fio não ser retilíneo ou o campo não ser uniforme, dividindo o fio em segmentos infinitesimais, temos

$$d\vec{F}_B = i d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (7.9)$$

Exemplo 7.3

Um fio horizontal retilíneo, feito de cobre, é percorrido por uma corrente de 28 A. Determine o módulo e a orientação do menor campo magnético capaz de manter o fio suspenso, ou seja, equilibrar a força gravitacional. A densidade linear (massa por unidade de comprimento) do fio é 46,6 g/m.

7.5 Torque em uma Espira Percorrida por uma Corrente

Considere uma espira percorrida por uma corrente i , na presença de um campo magnético \vec{B} . O módulo da força nos lados 1 e 3 é

$$F_1 = F_3 = iaB \sin 90^\circ = iaB, \quad (7.10)$$

enquanto que nos lados 2 e 4 o módulo é

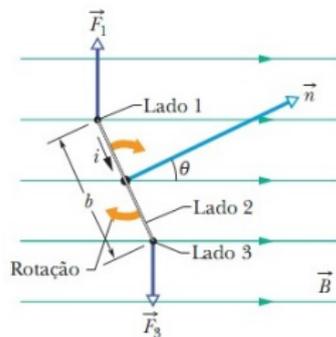
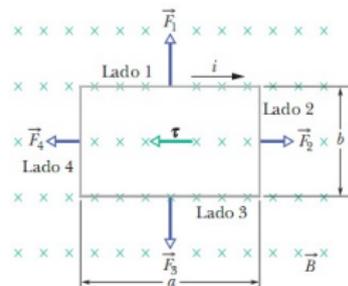
$$F_2 = F_4 = ibB \sin(90^\circ - \theta) = ibB \cos \theta \quad (7.11)$$

e estas se cancelam, não produzindo translação nem rotação. As forças \vec{F}_1 e \vec{F}_3 produzem os torques $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_3$, respectivamente, em relação ao eixo central da espira,

$$\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_3 = \frac{\vec{b}}{2} \times \vec{F}_1, \quad (7.12)$$

tal que,

$$\tau_1 = \tau_3 = \frac{b}{2} iaB \sin \theta, \quad (7.13)$$



com um torque total

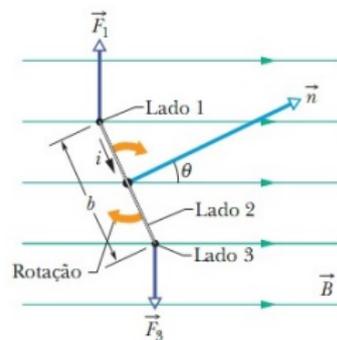
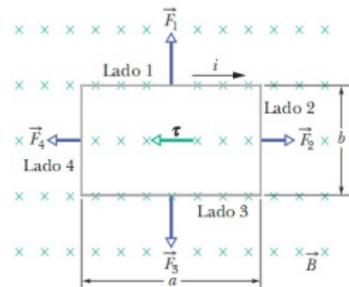
$$\tau = \tau_1 + \tau_3 = iabB \text{ sen } \theta. \quad (7.14)$$

Definindo

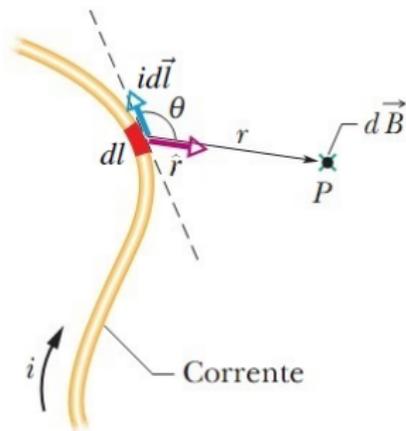
$$\vec{\tau} = \vec{A} = ab\hat{n}, \quad (7.15)$$

temos

$$\vec{\tau} = i\vec{A} \times \vec{B}. \quad (7.16)$$



7.6 Lei de Biot-Savart



O campo magnético gerado em um ponto P a uma distância r de um comprimento $d\vec{l}$ em um fio por onde passa uma corrente i é dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \text{ (lei de Biot-Savart),} \quad (7.17)$$

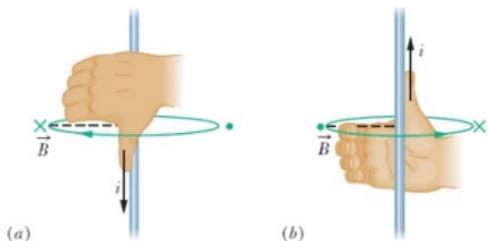
em que

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \quad (7.18)$$

é a permeabilidade magnética do vácuo.

7.7 Campo Magnético Produzido por uma Corrente

Fio Retilíneo Longo

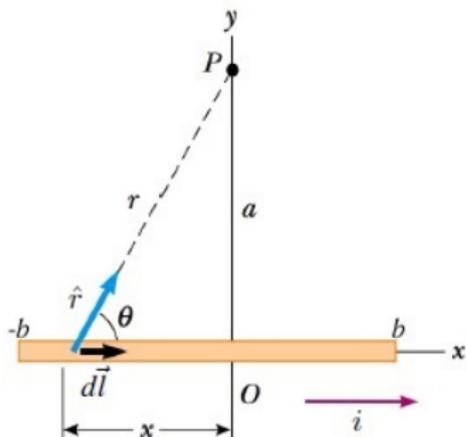


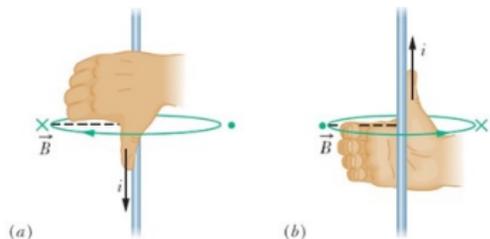
O campo produzido em P por um elemento do condutor $d\vec{l} = dx$, de acordo com a lei de Biot-Savart, é dado por

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2}. \quad (7.19)$$

Pela Fig., $r^2 = x^2 + a^2$ e $\sin \theta = a/\sqrt{x^2 + a^2}$. Logo, a Eq. (7.19) pode ser reescrita como

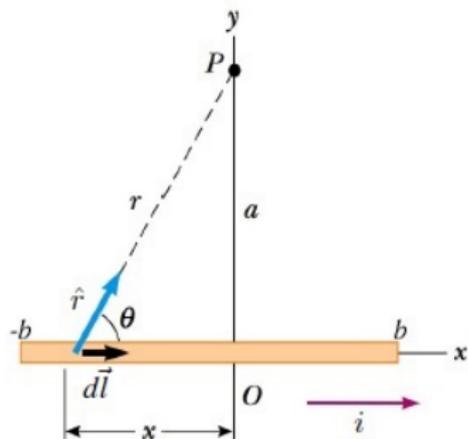
$$dB = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (7.20)$$





Integrando para todo o fio, temos

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \left[\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{-b}^b = \\
 &= \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[\frac{2b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right] = \\
 &= \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}. \quad (7.21)
 \end{aligned}$$



Para um fio retilíneo infinito, $b \rightarrow \infty$. Neste caso, temos

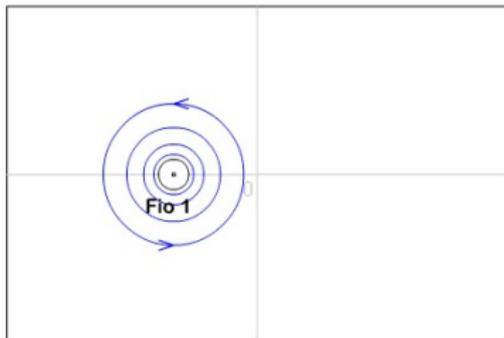
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \text{ (fio retilíneo infinito).} \quad (7.22)$$

Exemplo 7.4

Um fio retilíneo longo conduz uma corrente de 1,0 A. Para qual distância, a partir do eixo deste fio, o módulo do campo magnético produzido por esta corrente é $0,5 \times 10^{-24}$ T?

Simulação 7.2

Campo Magnético de um Fio



X, m:

Y, m:

Campo magnético, microT:

Força por unidade de comprimento, microN/m:

mostrar vetores de campo

mostrar linhas de campo

Corrente no fio da esquerda, A:

-4 4

Corrente no fio da direita, A:

-4 4

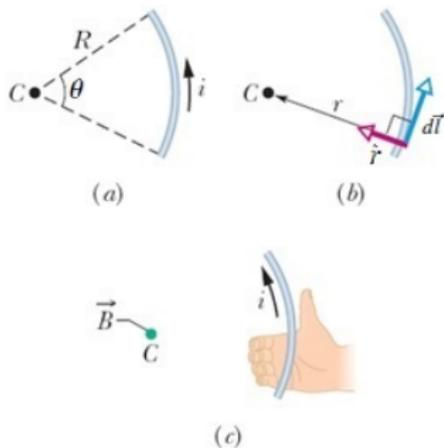
Testes Conceituais

Notas

Narrativa



Fio de Arco Circunferência



Uma seção dl do fio produz em C um campo magnético de módulo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{R^2}. \quad (7.23)$$

Como $dl = R d\theta$, temos

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} d\theta. \quad (7.24)$$

Integrando para todo o fio, temos

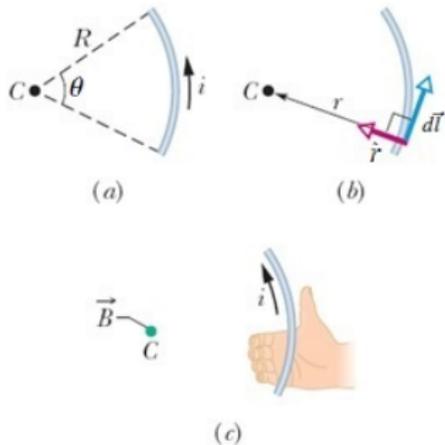
$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^\theta d\theta, \quad (7.25)$$

o que nos dá

$$B = \frac{\mu_0 i \theta}{4\pi R} \text{ (no centro de arco de circunferência)}. \quad (7.26)$$

Para uma circunferência completa (espira circular), $\theta = 2\pi$. Neste caso, temos

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \text{ (no centro de uma circunferência completa)}. \quad (7.27)$$

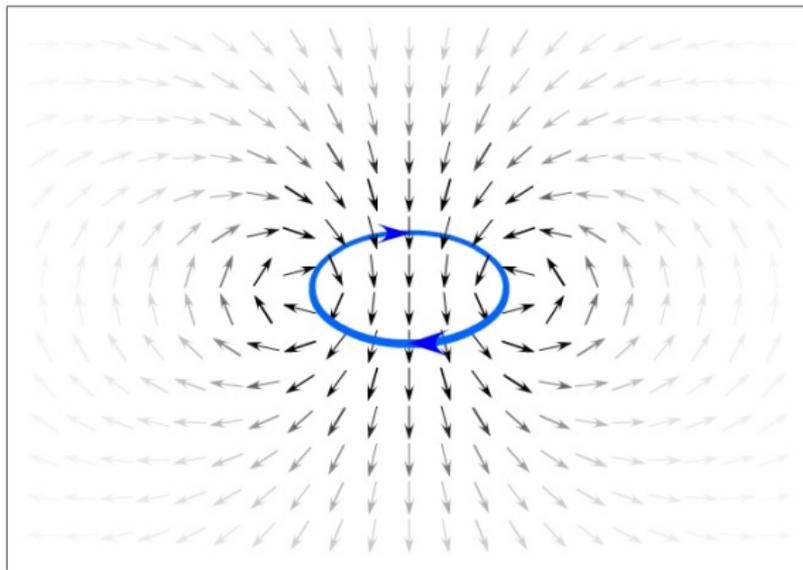


Exemplo 7.5

Determine a corrente em um anel circular de 8,0 cm de raio, que produzirá um campo magnético de 0,20 mT no centro do anel.

Simulação 7.3

Campo Magnético de uma Espira



Corrente (A):



Raio da espira = 60 cm

Raio da espira = 25 cm

Testes Conceituais

Notas

Narrativa



7.8 Forças entre Duas Correntes Paralelas

Sejam dois fios paralelos de comprimento l com correntes i_a e i_b , separados por uma distância d . A força magnética no fio b devido ao campo magnético \vec{B}_a é dada por

$$\vec{F}_{ba} = i_b \vec{l} \times \vec{B}_a, \quad (7.28)$$

que, de acordo com a Fig., possui módulo

$$F_{ba} = i_b l B_a \sin 90^\circ = i_b l B_a. \quad (7.29)$$

De acordo com a Eq. (7.22), em qualquer ponto do fio b ,

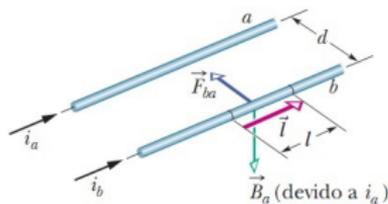
$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}. \quad (7.30)$$

Logo,

$$F_{ba} = \frac{\mu_0 l i_a i_b}{2\pi d}. \quad (7.31)$$

Simetricamente, $\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$.

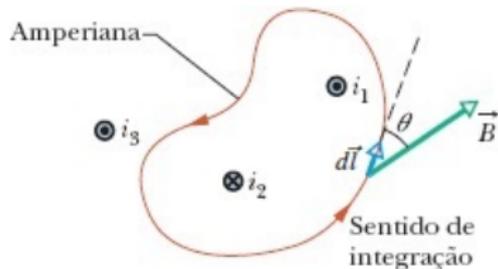
Correntes paralelas se atraem e antiparalelas se repelem.



Exemplo 7.6

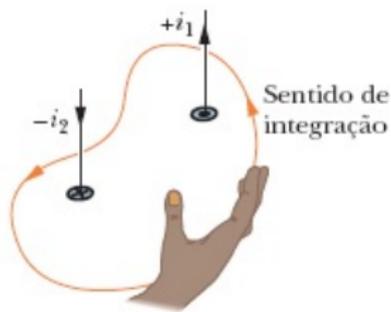
Dois fios supercondutores retilíneos paralelos, separados por uma distância de 4,5 mm, conduzem correntes iguais, porém em sentidos contrários, com módulo igual a $1,5 \times 10^4$ A. Que força por unidade de comprimento cada fio exerce sobre o outro?

7.9 Lei de Ampère



A lei de Ampère relaciona o campo magnético à corrente total envolvida por uma curva fechada (amperiana) i_{env} , tal que

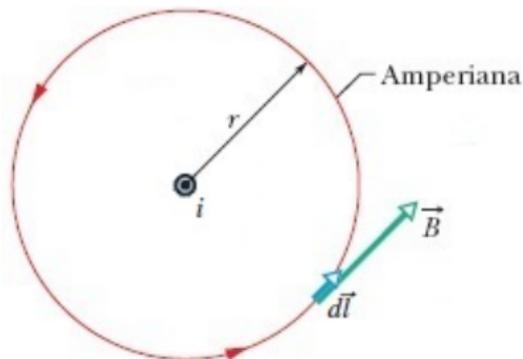
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{env}} \text{ (lei de Ampère).} \quad (7.32)$$



7.9.1 Aplicações da Lei de Ampère

Fio Retilíneo Infinito

Considere uma amperiana concêntrica ao fio (Fig.). Pela lei de Ampère, temos



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{env}} \therefore$$

$$\therefore \oint B dl \cos 0 = \mu_0 i \therefore$$

$$\therefore \oint B dl = \mu_0 i \therefore$$

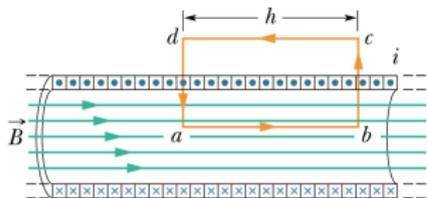
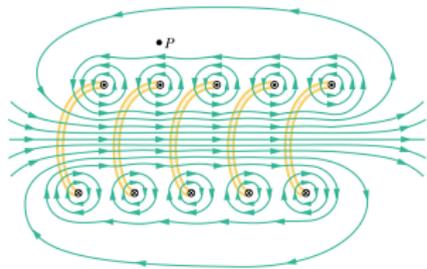
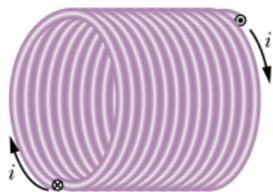
$$\therefore B \oint dl = \mu_0 i \therefore$$

$$\therefore B(2\pi r) = \mu_0 i,$$

o que nos dá

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \text{ (fio retilíneo infinito).} \quad (7.33)$$

Solenóide

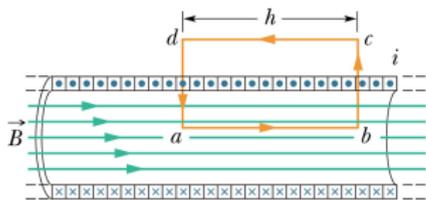
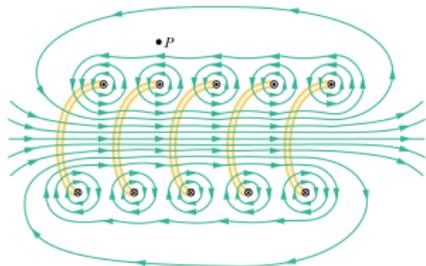
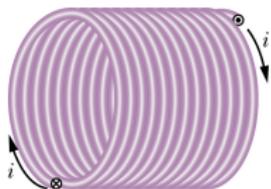


Um solenóide é basicamente um conjunto de espiras empilhadas. Aplicando a lei de Ampère ao circuito $abcd$ da Fig., temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b B dl \cos 0 + \int_b^c B dl \cos 90^\circ + \\ + \int_c^d 0 dl \cos 0 + \int_d^a B dl \cos 90^\circ = \mu_0 i_{\text{env}}$$

$$\therefore B \int_a^b dl = \mu_0 i_{\text{env}} \therefore$$

$$\therefore Bh = \mu_0 i_{\text{env}}$$



A corrente total envolvida é dada por

$$i_{\text{env}} = Ni, \quad (7.34)$$

em que N é o número de espiras. Sendo n o número de espiras por unidade de comprimento, temos

$$i_{\text{env}} = nhi. \quad (7.35)$$

Deste modo,

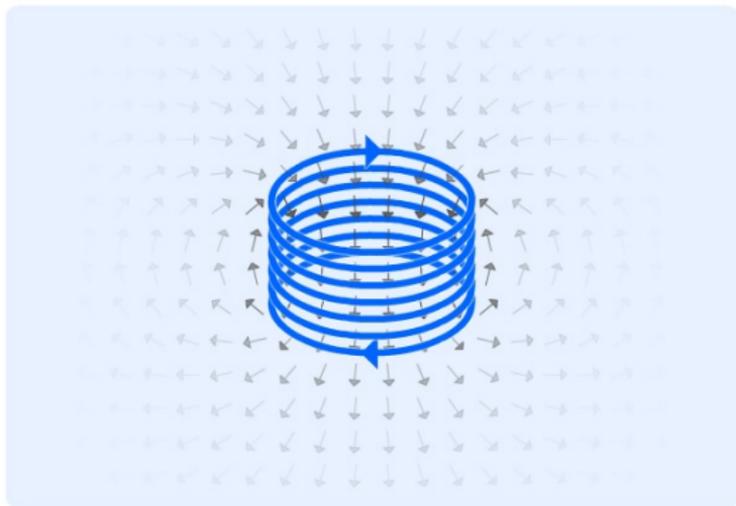
$$B = \mu_0 ni \text{ (solenóide)}. \quad (7.36)$$

Exemplo 7.7

Qual é a valor do campo magnético no centro de um solenóide de 4250 espiras que tem 1,23 m de comprimento, 3,55 m de diâmetro que conduz uma corrente de 5,57 A?

Simulação 7.4

Campo Magnético de um Solenóide



Corrente A

Separação cm

Raio da espira = 60 cm

Raio da espira = 25 cm

Testes Conceituais

Notas

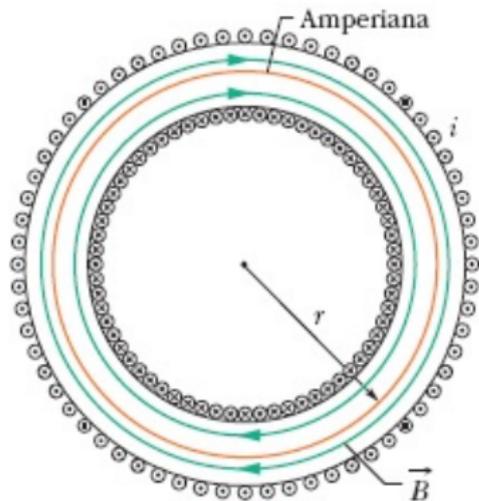
Narrativa



Toróide



(a)



(b)

Um toróide é basicamente um solenóide curvado com as extremidades identificadas. Seja o toróide da Fig.. Considere uma amperiana concêntrica de raio r . Percorrendo-a no sentido horário, pela lei de Ampère, temos

$$B(2\pi r) = \mu_0 Ni, \quad (7.37)$$

o que nos N é o número de espiras. Logo,

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \text{ (toróide)}. \quad (7.38)$$

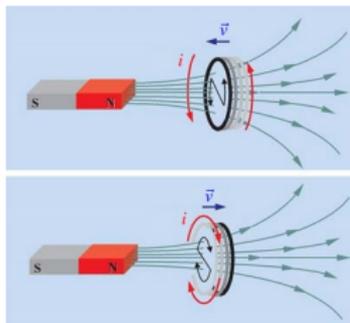
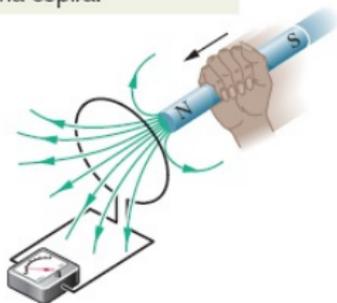
8 Indução e Indutância



8.1 Experimentos de Faraday

Primeiro Experimento

O movimento do ímã produz uma corrente na espira.



Observações

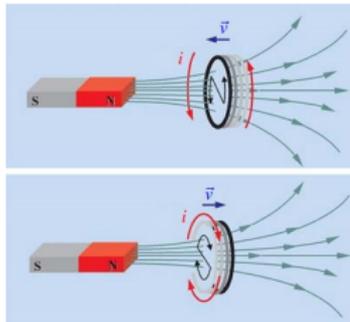
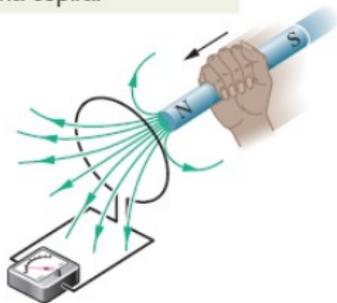
- 1 A corrente será observada apenas se existir um movimento relativo entre a espira e o ímã e desaparecerá no momento em que o movimento relativo deixar de existir.
- 2 Quanto mais rápido for o movimento, maior será a corrente.
- 3 Se invertermos o sentido do movimento ou a polaridade do ímã, a corrente mudará de sentido.

A corrente produzida na espira é chamada de corrente induzida.

8.1 Experimentos de Faraday

Primeiro Experimento

O movimento do ímã produz uma corrente na espira.



Observações

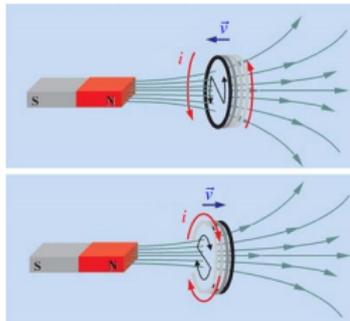
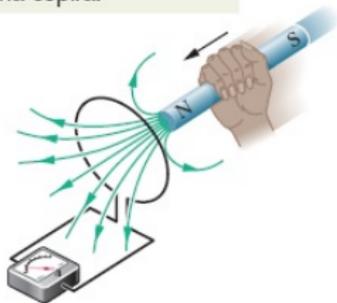
- 1 A corrente será observada apenas se existir um movimento relativo entre a espira e o ímã e desaparecerá no momento em que o movimento relativo deixar de existir.
- 2 Quanto mais rápido for o movimento, maior será a corrente.
- 3 Se invertermos o sentido do movimento ou a polaridade do ímã, a corrente mudará de sentido.

A corrente produzida na espira é chamada de corrente induzida.

8.1 Experimentos de Faraday

Primeiro Experimento

O movimento do ímã produz uma corrente na espira.

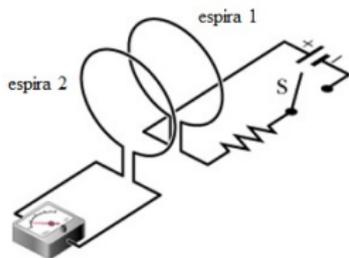


Observações

- 1 A corrente será observada apenas se existir um movimento relativo entre a espira e o ímã e desaparecerá no momento em que o movimento relativo deixar de existir.
- 2 Quanto mais rápido for o movimento, maior será a corrente.
- 3 Se invertermos o sentido do movimento ou a polaridade do ímã, a corrente mudará de sentido.

A corrente produzida na espira é chamada de corrente induzida.

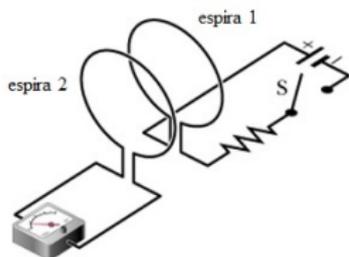
Segundo Experimento



Observações

- 1 Quando a chave S na espira 1 é fechada, o amperímetro registra, por um breve instante, uma corrente na espira 2.
- 2 Quando a chave S é aberta, o instrumento registra uma corrente, no sentido oposto.
- 3 Uma corrente é induzida na espira 2 (e, portanto, uma fem também é) quando a corrente na espira 1 varia (aumenta ou diminui), mas não quando é constante (chave S permanentemente aberta ou permanentemente fechada).

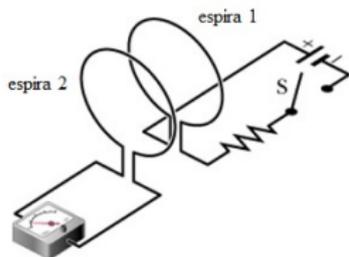
Segundo Experimento



Observações

- 1 Quando a chave S na espira 1 é fechada, o amperímetro registra, por um breve instante, uma corrente na espira 2.
- 2 Quando a chave S é aberta, o instrumento registra uma corrente, no sentido oposto.
- 3 Uma corrente é induzida na espira 2 (e, portanto, uma fem também é) quando a corrente na espira 1 varia (aumenta ou diminui), mas não quando é constante (chave S permanentemente aberta ou permanentemente fechada).

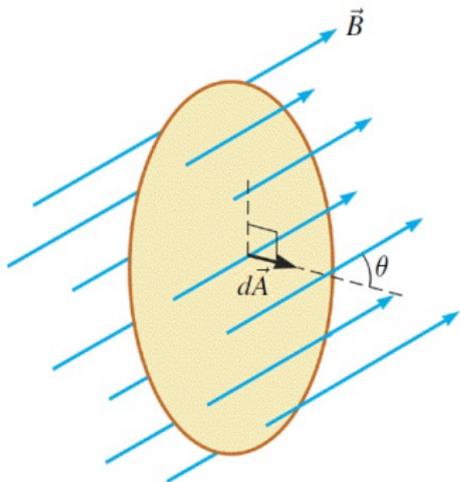
Segundo Experimento



Observações

- 1 Quando a chave S na espira 1 é fechada, o amperímetro registra, por um breve instante, uma corrente na espira 2.
- 2 Quando a chave S é aberta, o instrumento registra uma corrente, no sentido oposto.
- 3 Uma corrente é induzida na espira 2 (e, portanto, uma fem também é) quando a corrente na espira 1 varia (aumenta ou diminui), mas não quando é constante (chave S permanentemente aberta ou permanentemente fechada).

8.2 Fluxo Magnético

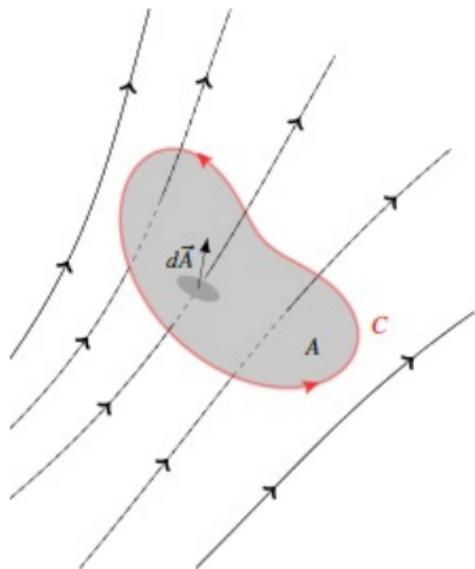


O fluxo de um campo magnético \vec{B} através de uma área \vec{A} é definido por

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (8.1)$$

Unidade no SI: $\text{T} \cdot \text{m}^2 \equiv \text{Wb}$ (weber)

8.3 Lei de Indução de Faraday



O módulo da fem induzida por um campo magnético em um circuito fechado é proporcional à taxa de variação temporal do fluxo magnético que atravessa a área delimitada por este circuito.

A fem induzida se opõe à variação do fluxo magnético. Deste modo, a lei de Faraday pode ser escrita como

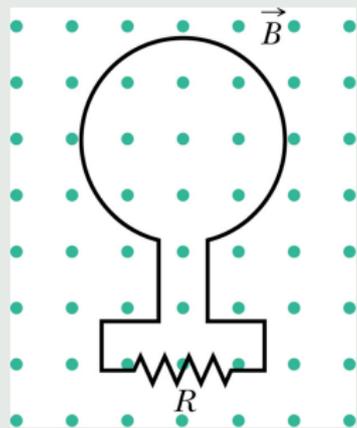
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \text{ (lei de Faraday).} \quad (8.2)$$

Para o caso de um solenóide de N espiras, temos

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \text{ (solenóide de } N \text{ espiras).} \quad (8.3)$$

Exemplo 8.1

Na Fig., o fluxo de campo magnético na espira aumenta de acordo com a equação $\Phi_B = 6,0t^2 + 7,0t$, em que Φ_B está em mW e t , em s. (a) Qual é o módulo da fem induzida na espira no instante $t = 2,0$ s? (b) O sentido da corrente no resistor R é para a direita ou para a esquerda?



Simulação 8.1

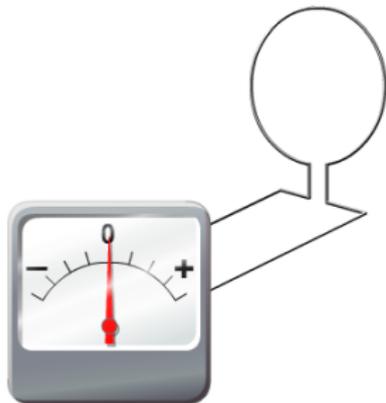
Lei de Indução de Faraday

Introduzir o Polo Norte

Remover o Polo Norte

Introduzir o Polo Sul

Remover o Polo Sul



Testes Conceituais

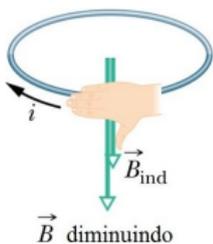
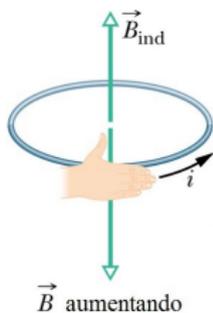
Notas

Narrativa



8.4 Lei de Lenz

Uma fem induzida tem o sentido tal que se opõe, ou tende a se opor, à variação que a produz.

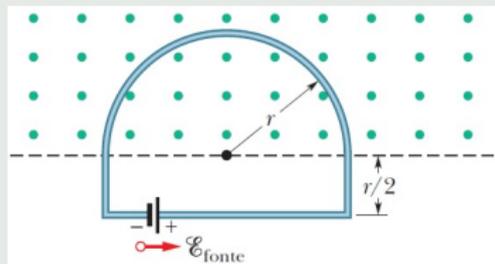


Aproximando-se, por exemplo, um ímã de uma espira, o fluxo magnético através desta aumenta. Para manter o fluxo constante, a corrente induzida produz um campo magnético induzido \vec{B}_{ind} no sentido oposto ao do campo magnético externo \vec{B} .

Afastando-se, por exemplo, um ímã de uma espira, o fluxo magnético através desta diminui. Para manter o fluxo constante, a corrente induzida produz um campo magnético induzido \vec{B}_{ind} no mesmo sentido do campo magnético externo \vec{B} .

Exemplo 8.2

A Fig. mostra uma espira condutora formada por uma semicircunferência de raio $r = 0,20$ m e três fios retilíneos. A semicircunferência está em uma região onde existe um campo magnético uniforme \vec{B} orientado para fora do papel; o módulo do campo é dado por $B = 4,0t^2 + 2,0t + 3,0$, com B em T e t em s. Uma fonte ideal com uma fem $\mathcal{E}_{\text{fonte}} = 2,0$ V é ligada à espira. Determine o módulo e o sentido da fem induzida na espira pelo campo \vec{B} em $t = 10$ s.



8.5 Indutores e Indutância



Indutor é um dispositivo que pode ser usado para produzir um campo magnético com um valor desejado em uma região do espaço.

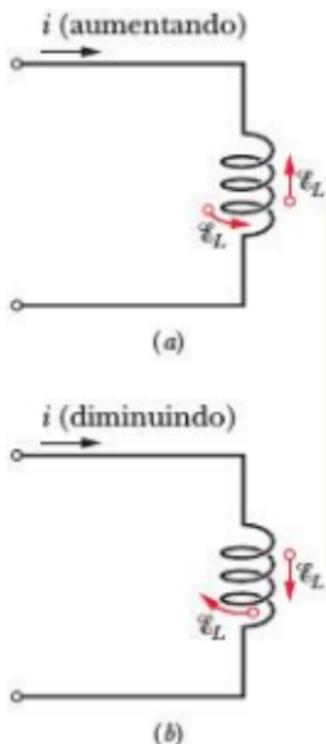
A indutância de um indutor, pelo qual uma corrente i atravessa as suas N espiras é definida por

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}, \quad (8.4)$$

em que Φ_B é o fluxo magnético na sua região central.

Unidade no SI: $\text{T} \cdot \text{m}^2/\text{A} \equiv \text{H}$ (henry)

8.6 Autoindução



Se uma corrente i em um indutor varia com o tempo, uma fem é induzida neste indutor.

De (8.4), temos

$$N\Phi_B = Li. \quad (8.5)$$

Da lei de Faraday, temos

$$\mathcal{E} = -\frac{Nd\Phi_B}{dt}. \quad (8.6)$$

Substituindo (8.5) em (8.6), temos

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt} \text{ (fem induzida)}. \quad (8.7)$$

O sentido de \mathcal{E}_L é dado pela lei de Lenz: a fem induzida se opõe à variação que a produz.

8.7 Energia Armazenada em um Campo Magnético

A potência fornecida a um indutor é dada por

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}_L i. \quad (8.8)$$

Substituindo (8.7) em (8.8), temos

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= Li \frac{di}{dt} \therefore \\ \therefore dW &= Li di. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Integrando (8.9), temos

$$W = \int_0^i Li' di' = \frac{Li^2}{2}. \quad (8.10)$$

Como o trabalho realizado é armazenado na forma da energia potencial U_B do indutor, temos

$$U_B = \frac{Li^2}{2}. \quad (8.11)$$

Exemplo 8.3

A indústria de produção de energia elétrica gostaria de encontrar um modo eficiente de armazenar a energia gerada a mais nas horas em que o consumo diminui, para poder atender à demanda dos consumidores nas horas de pico. Talvez um grande indutor pudesse ser usado. Qual seria a indutância necessária para armazenar $1,00 \text{ kW} \cdot \text{h}$ de energia em uma bobina conduzindo uma corrente de 200 A ?



9.1 Circuitos Eléctricos de Corrente Contínua

São aqueles nos quais a corrente não varia com o tempo. Exs.: lanternas, circuito eléctrico de um automóvel.

9.1.2 Associação de Resistores

Associação em Série

Neste caso, a corrente que passa pelos resistores é a mesma. As ddp's em cada resistor são

$$V_1 = R_1 i, \quad V_2 = R_2 i \text{ e } V_3 = R_3 i. \quad (9.1)$$

Sabendo que a ddp total é $V = V_1 + V_2 + V_3$, temos

$$V = R_1 i + R_2 i + R_3 i. \quad (9.2)$$

Como $V = R_{\text{eq}} i$, temos

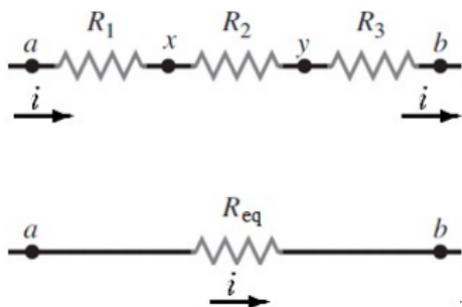
$$R_{\text{eq}} i = R_1 i + R_2 i + R_3 i, \quad (9.3)$$

implicando em

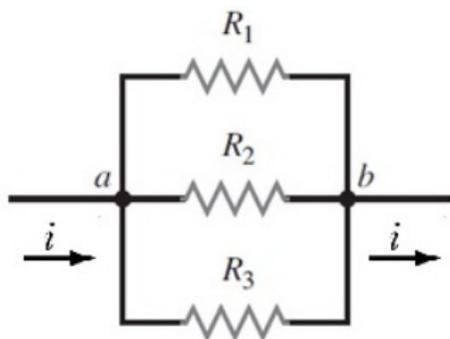
$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3. \quad (9.4)$$

Generalizando para n resistores, temos

$$R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (9.5)$$



Associação em Paralelo

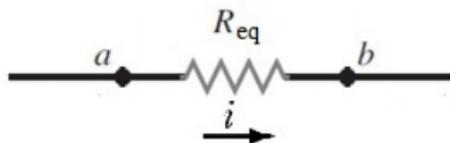


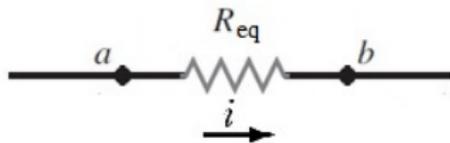
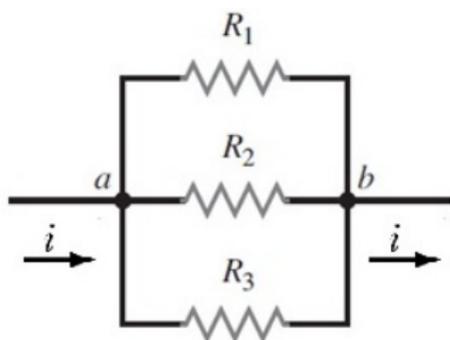
Neste caso, todos os resistores ficam submetidos à mesma ddp. As correntes que passam pelos resistores são

$$i_1 = \frac{V}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2} \text{ e } i_3 = \frac{V}{R_3}. \quad (9.6)$$

Sabendo que a corrente total é $i = i_1 + i_2 + i_3$, temos

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}. \quad (9.7)$$





Como $i = \frac{V}{R_{eq}}$, temos

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}, \quad (9.8)$$

implicando em

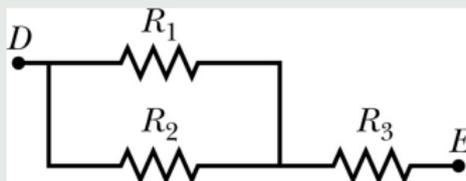
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (9.9)$$

Generalizando para n resistores, temos

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (9.10)$$

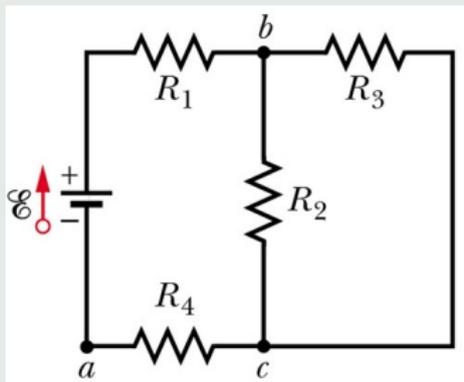
Exemplo 9.1

Na Fig., $R_1 = R_2 = 4,00 \Omega$ e $R_3 = 2,50 \Omega$. Determine a resistência equivalente entre os pontos D e E .



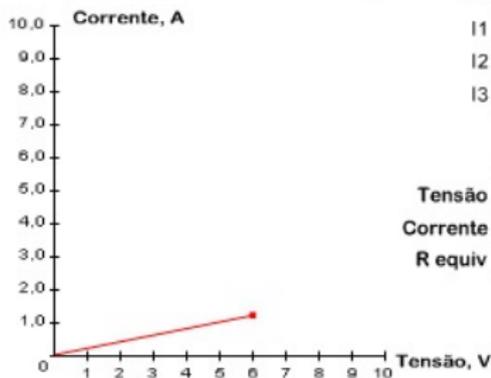
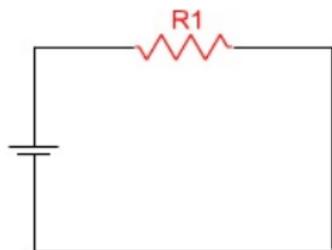
Exemplo 9.2

Sendo $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 8,0 \Omega$ e $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, calcule (a) a resistência equivalente entre os terminais da fonte e (b) a corrente na fonte.



Simulação 9.1

Circuitos Série e Circuitos Paralelo



Tensões nos Resistores:

V1 V
V2 V
V3 V

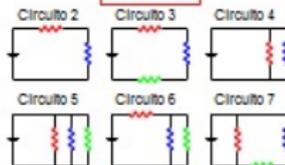
Correntes nos Resistores:

I1 A
I2 A
I3 A

Totais:

Tensão V
Corrente A
R equiv ohms

Circuito 1



Tensão da bateria: V
1 10
Resistência de R1: ohms
1 10
Resistência de R2: ohms
1 10
Resistência de R3: ohms
1 10

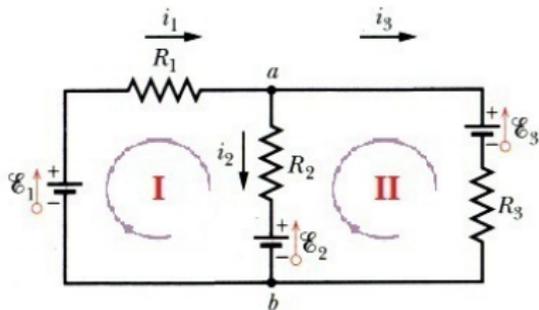
Testes Conceituais

Notas

Narrativa



9.1.2 Leis de Kirchoff

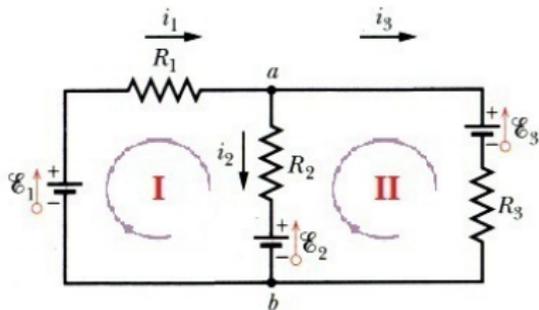


Para entendermos as leis de Kirchoff, temos que definir nó, malha e ramo.

- **Nó** - ponto do circuito onde três ou mais condutores são ligados;
- Malha - qualquer caminho fechado do circuito;
- Ramo - caminho aberto entre dois nós.

Na Fig., a e b são nós; I e II são malhas.

9.1.2 Leis de Kirchoff

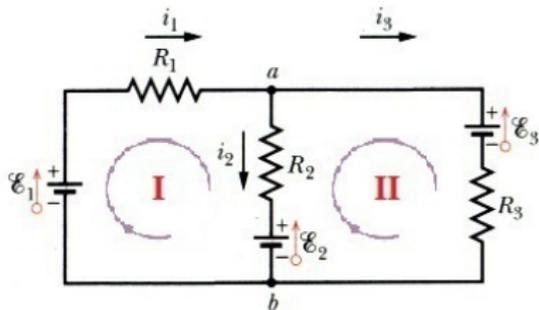


Para entendermos as leis de Kirchoff, temos que definir nó, malha e ramo.

- Nó - ponto do circuito onde três ou mais condutores são ligados;
- **Malha - qualquer caminho fechado do circuito;**
- Ramo - caminho aberto entre dois nós.

Na Fig., a e b são nós; I e II são malhas.

9.1.2 Leis de Kirchhoff



Para entendermos as leis de Kirchhoff, temos que definir nó, malha e ramo.

- Nó - ponto do circuito onde três ou mais condutores são ligados;
- Malha - qualquer caminho fechado do circuito;
- **Ramo - caminho aberto entre dois nós.**

Na Fig., a e b são nós; I e II são malhas.

Primeira Lei de Kirchhoff (Lei dos Nós)

“A soma das correntes em um nó é nula.”

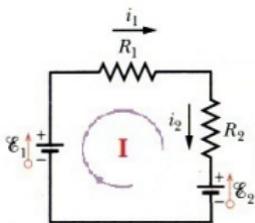
$$\sum i = 0.$$

“Em um nó, a soma das correntes que chegam é igual à das que saem.”

Segunda Lei de Kirchhoff (Lei das Malhas)

“A soma das tensões em uma malha é nula.”

$$\sum V = 0.$$



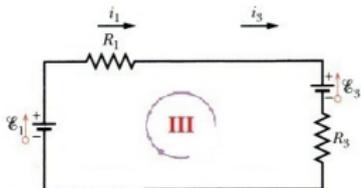
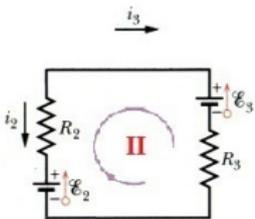
Para o circuito ao lado, temos

$$i_1 = i_2 + i_3,$$

$$\mathcal{E}_1 - R_1 i_1 - R_2 i_2 - \mathcal{E}_2 = 0,$$

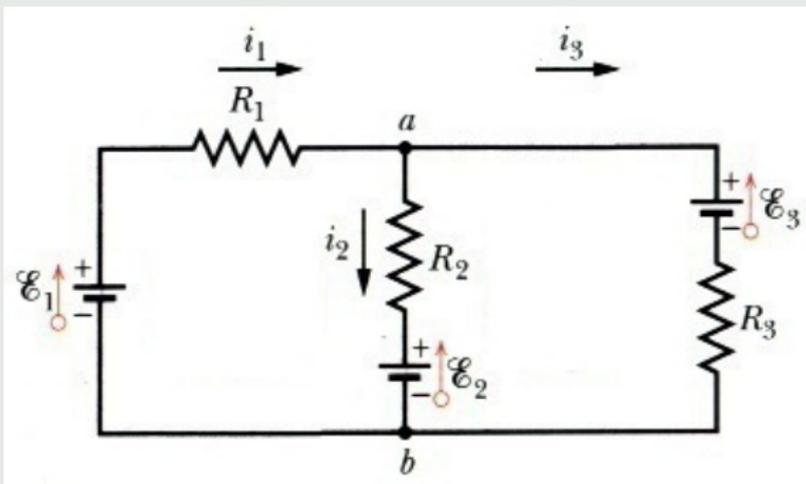
$$\mathcal{E}_2 + R_2 i_2 - R_3 i_3 - \mathcal{E}_3 = 0,$$

$$\mathcal{E}_1 - R_1 i_1 - \mathcal{E}_3 - R_3 i_3 = 0.$$



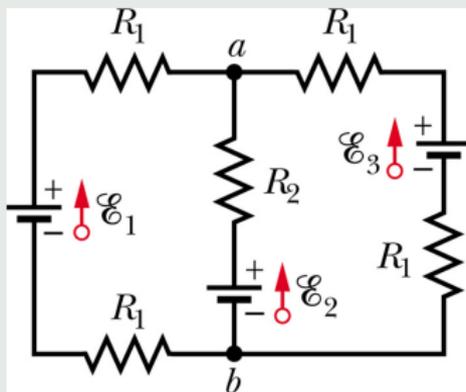
Exemplo 9.3

Na Fig., as resistências são $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$ e as fem's das fontes ideais são $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 10 \text{ V}$ e $\mathcal{E}_3 = 20 \text{ V}$. Calcule as correntes i_1 , i_2 e i_3 .



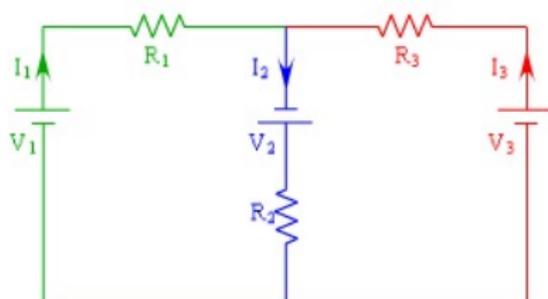
Exemplo 9.4

Na Fig., as resistências são $R_1 = 1,0 \Omega$ e $R_2 = 2,0 \Omega$. Quais são os módulos das correntes que passam pelas fontes ideais de fem's $\mathcal{E}_1 = 2,0 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 4,0 \text{ V}$ e $\mathcal{E}_3 = 4,0 \text{ V}$?



Simulação 9.2

Circuito com Várias Malhas



$$I_1 + I_3 = I_2$$

Malha esquerda: $+V_1 - R_1 \cdot I_1 + V_2 - R_2 \cdot I_2 = 0$

Malha direita: $+R_3 \cdot I_3 - V_3 + R_2 \cdot I_2 - V_2 = 0$

Malha externa: $+V_1 - R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 - V_3 = 0$

I_1 0.97 A

I_2 1.78 A

I_3 0.81 A

Sentido de I_1

- para cima
 para baixo

Sentido de I_2

- para cima
 para baixo

Sentido de I_3

- para cima
 para baixo

Tensão da bateria 1 (volts):



Tensão da bateria 2 (volts):



Tensão da bateria 3 (volts):



Resistência do resistor 1 (ohms):



Resistência do resistor 2 (ohms):



Resistência do resistor 3 (ohms):



Testes Conceituais

Notas

Narrativa



9.1.3 Circuito RC

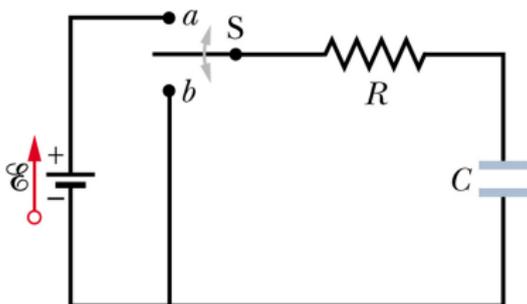
Chave em a (carregando o capacitor):

Pela segunda lei de Kirchhoff, temos

$$\mathcal{E} - Ri - \frac{q}{C} = 0. \quad (9.11)$$

Como $i = \frac{dq}{dt}$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} &= 0 \therefore \\ \therefore R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} &= \mathcal{E} \therefore \\ \therefore \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} &= \frac{\mathcal{E}}{R} \therefore \\ \therefore \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{R} \left(\mathcal{E} - \frac{q}{C} \right) \therefore \end{aligned}$$



$$\therefore \frac{dq}{\mathcal{E} - \frac{q}{C}} = \frac{dt}{R}.$$

Quando $t = 0$, $q = 0$. Logo,

$$\int_0^q \frac{dq'}{\mathcal{E} - \frac{q'}{C}} = \int_0^t \frac{dt'}{R}.$$

Fazendo $x = \mathcal{E} - \frac{q'}{C}$, temos

$$dx = -\frac{dq'}{C} \therefore$$

$$\therefore dq' = -Cdx.$$

Quando $q' = 0$, $x = \mathcal{E}$. Assim,

$$-C \int_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E} - \frac{q}{C}} \frac{dx}{x} = \int_0^t \frac{dt'}{R} \therefore$$

$$\therefore -C \ln x \Big|_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E} - \frac{q}{C}} = \frac{t}{R} \therefore$$

$$\therefore \ln \left| \frac{\mathcal{E} - \frac{q}{C}}{\mathcal{E}} \right| = -\frac{t}{RC} \therefore$$

$$\therefore \frac{\mathcal{E} - \frac{q}{C}}{\mathcal{E}} = e^{-\frac{t}{RC}} \therefore$$

$$\therefore \mathcal{E} - \frac{q}{C} = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}} \therefore$$

$$\therefore \frac{q}{C} = \mathcal{E} - \mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}} \therefore$$

$$\therefore \frac{q}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

implicando em

$$q = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \quad (9.12)$$

A corrente é dada por

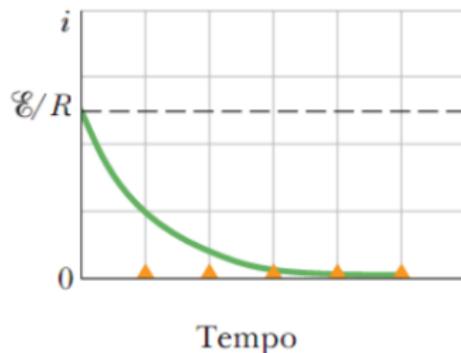
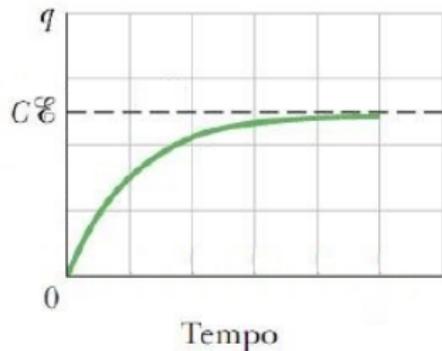
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.13)$$

Quando $t = 0$,

$$q = C\mathcal{E} (1 - 1) \therefore$$
$$\therefore q = 0,$$
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Quando $t = \infty$,

$$q = C\mathcal{E} (1 - 0) \therefore$$
$$\therefore q = C\mathcal{E},$$
$$i = 0.$$



Chave em b (descarregando o capacitor):

Pela segunda lei de Kirchhoff, temos

$$Ri + \frac{q}{C} = 0. \quad (9.14)$$

Como $i = \frac{dq}{dt}$, temos

$$\begin{aligned} R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} &= 0 \therefore \\ \therefore \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} &= 0 \therefore \\ \therefore \frac{dq}{dt} &= -\frac{q}{RC}. \end{aligned}$$

Quando $t = 0$, $q = q_0$. Logo,

$$\int_{q_0}^q \frac{dq'}{q'} = - \int_0^t \frac{dt'}{RC} \therefore$$

$$\therefore \ln \left| \frac{q}{q_0} \right| = -\frac{t}{RC},$$

implicando em

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.15)$$

Como $q_0 = C\mathcal{E}$, temos

$$q = C\mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.16)$$

A corrente é dada por

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{C\mathcal{E}}{RC} e^{-\frac{t}{RC}},$$

implicando em

$$i = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.17)$$

Quando $t = 0$,

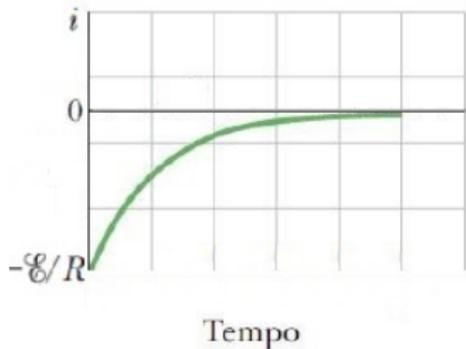
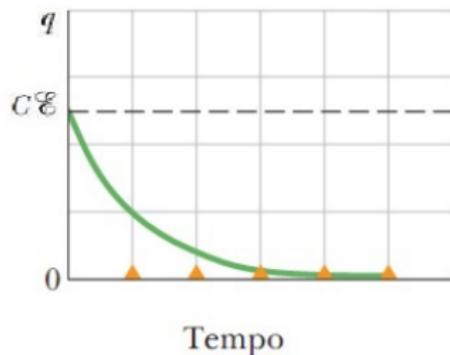
$$q = C\mathcal{E},$$

$$i = -\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Quando $t = \infty$,

$$q = 0,$$

$$i = 0.$$

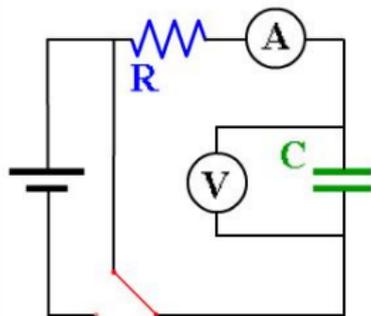


Exemplo 9.5

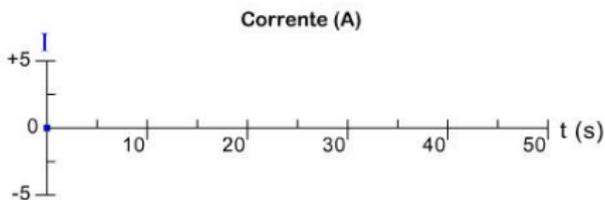
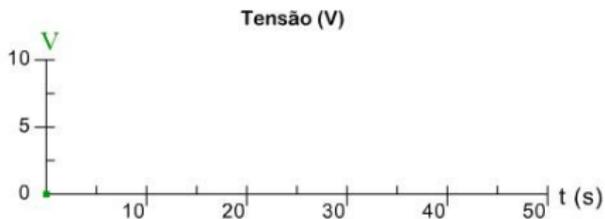
Em um circuito RC série, $\mathcal{E} = 12,0 \text{ V}$, $R = 1,40 \text{ M}\Omega$ e $C = 1,80 \mu\text{F}$. (a) Determine a carga máxima que o capacitor pode receber ao ser carregado. (b) Qual é o tempo necessário para que a carga do capacitor atinja o valor de $16,0 \mu\text{C}$?

Simulação 9.3

Circuito RC



Corrente = 0.0 A
Tensão do capacitor = 0.0 V
Tempo = 0.0 s
Constante de tempo = 8.0 s



Carregar

Apagar

Resistência ohms

2 6

Capacitância F

1 3

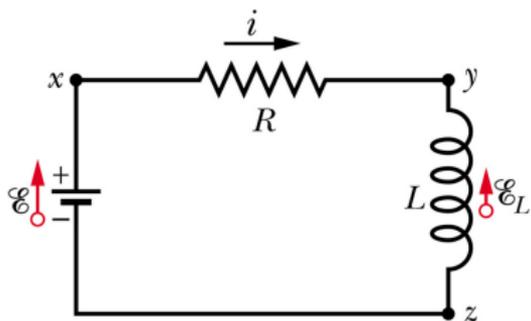
Testes Conceituais

Notas

Narrativa



9.1.4 Circuito RL



Chave em a (carregando o indutor):

Pela segunda lei de Kirchhoff, temos

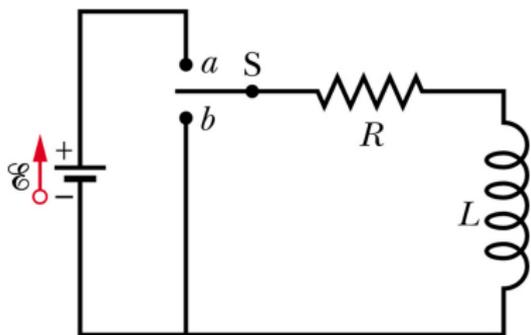
$$\mathcal{E} - Ri - L \frac{di}{dt} = 0 \therefore$$

$$\therefore L \frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E} \therefore$$

$$\therefore \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\mathcal{E}}{L} \therefore$$

$$\therefore \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (\mathcal{E} - Ri) \therefore$$

$$\therefore \frac{di}{\mathcal{E} - Ri} = \frac{dt}{L}$$



Quando $t = 0$, $i = 0$. Logo,

$$\int_0^i \frac{di'}{\mathcal{E} - Ri'} = \int_0^t \frac{dt'}{L}.$$

Fazendo $x = \mathcal{E} - Ri'$, temos

$$dx = -R di' \therefore$$

$$\therefore di' = -\frac{dx}{R}.$$

Quando $i' = 0$, $x = \mathcal{E}$. Assim,

$$-\frac{1}{R} \int_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}-Ri} \frac{dx}{x} = \int_0^t \frac{dt'}{L} \therefore$$

$$\therefore -\frac{1}{R} \ln x \Big|_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}-Ri} = \frac{t}{L} \therefore$$

$$\therefore \ln \left| \frac{\mathcal{E} - Ri}{\mathcal{E}} \right| = -\frac{R}{L} t \therefore$$

$$\therefore \frac{\mathcal{E} - Ri}{\mathcal{E}} = e^{-\frac{R}{L} t} \therefore$$

$$\therefore \mathcal{E} - Ri = \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L} t} \therefore$$

$$\therefore Ri = \mathcal{E} - \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L} t} \therefore$$

$$\therefore Ri = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right),$$

implicando em

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right). \quad (9.18)$$

Quando $t = 0$,

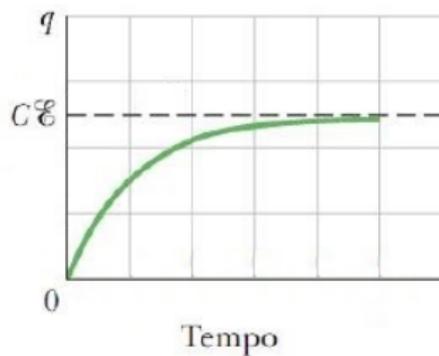
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - 1) \therefore$$

$$\therefore i = 0.$$

Quando $t = \infty$,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - 0) \therefore$$

$$\therefore i = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$



Chave em b (descarregando o indutor):

Pela segunda lei de Kirchhoff, temos

$$\begin{aligned}L \frac{di}{dt} + Ri &= 0 \therefore \\ \therefore \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i &= 0 \therefore \\ \therefore \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i.\end{aligned}$$

Quando $t = 0, i = i_0$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{i_0}^i \frac{di'}{i'} &= -\frac{R}{L} \int_0^t dt' \therefore \\ \therefore \ln \left| \frac{i}{i_0} \right| &= -\frac{R}{L}t,\end{aligned}$$

implicando em

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.19)$$

Como $i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$, temos

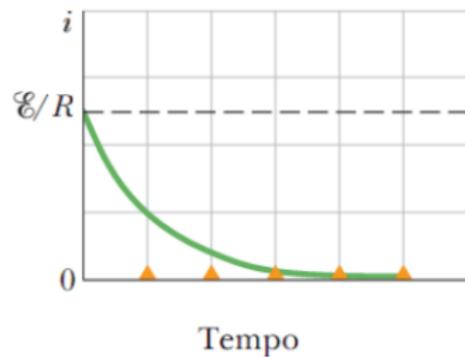
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (9.20)$$

Quando $t = 0$,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Quando $t = \infty$,

$$i = 0.$$



Exemplo 9.6

Um solenóide tem uma indutância de 53 mH e uma resistência de $0,37 \Omega$. Se o solenóide é ligado a uma bateria, quanto tempo a corrente leva para atingir metade do valor final?

9.2 Oscilações Eletromagnéticas

Uma vez carregado o capacitor, analisaremos as oscilações eletromagnéticas ocorridas em um circuito LC (livres) e em um circuito RLC (amortecidas).

9.2.1 Oscilações LC

Pela segunda lei de Kirchoff, temos

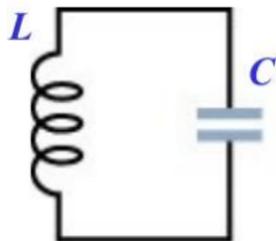
$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (9.21)$$

Como $i = \frac{dq}{dt}$, temos

$$\begin{aligned} L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} &= 0 \therefore \\ \therefore \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q &= 0, \end{aligned}$$

cuja solução é dada por

$$q = Q \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (9.22)$$



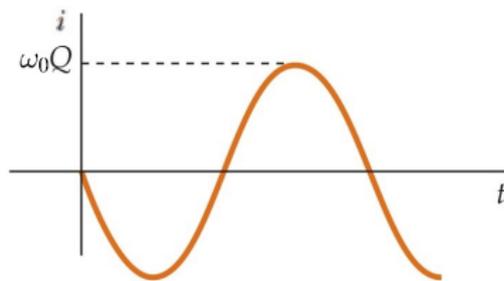
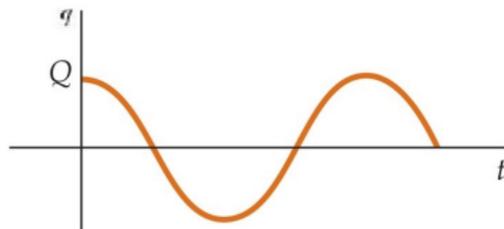
em que Q é a amplitude das variações da carga,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.23)$$

é a frequência angular natural de oscilações eletromagnéticas e φ , o ângulo de fase.

A corrente é dada por

$$i = -\omega_0 Q \text{sen}(\omega_0 t + \varphi). \quad (9.24)$$



Exemplo 9.7

Um capacitor de $1,5 \mu\text{F}$ é carregado por uma bateria de 57 V , que em seguida é desligado. No instante $t = 0$, um indutor de 12 mH é ligado ao capacitor para formar um oscilador LC . Qual é a diferença de potencial entre os terminais do indutor em função do tempo?

9.2.2 Oscilações *RLC*

Pela segunda lei de Kirchoff, temos

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0. \quad (9.25)$$

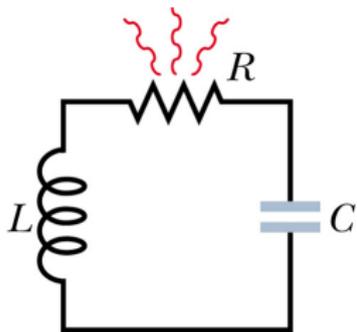
Como $i = \frac{dq}{dt}$, temos

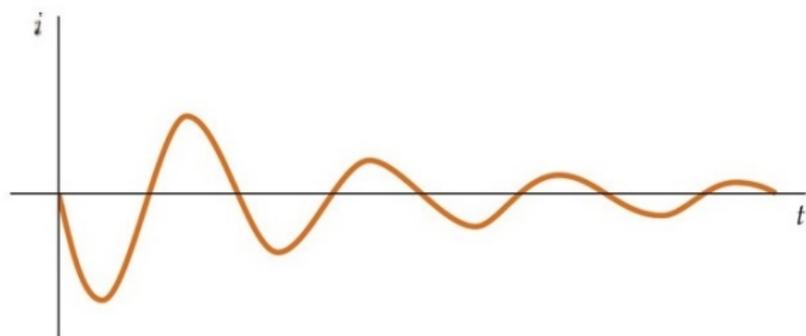
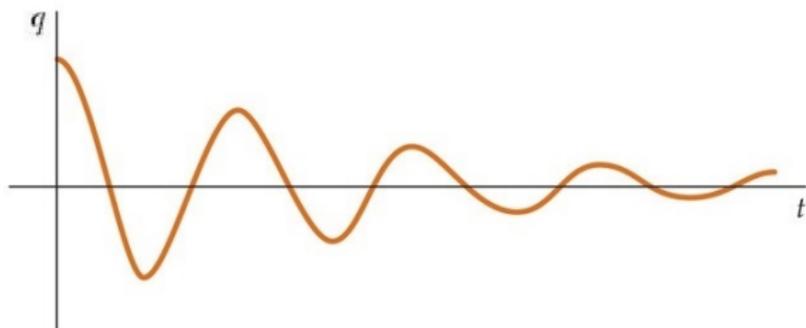
$$\begin{aligned} L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} &= 0 \therefore \\ \therefore \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q &= 0, \end{aligned}$$

cuja solução é dada por

$$q = Qe^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (9.26)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (9.27)$$





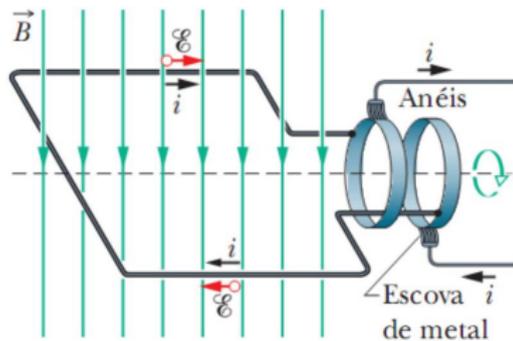
Exemplo 9.8

Um circuito RLC série tem um indutor de 12 mH , um capacitor de $1,6 \mu\text{F}$ e um resistor de $1,5 \Omega$ e começa a oscilar no instante $t = 0$. Em que instante a amplitude das oscilações da carga atinge a metade do valor inicial?

9.3 Circuitos Elétricos de Corrente Alternada

São aqueles nos quais a corrente varia no tempo, alternando o seu sentido.
Ex.: aparelhos eletrodomésticos.

9.3.1 Corrente Alternada

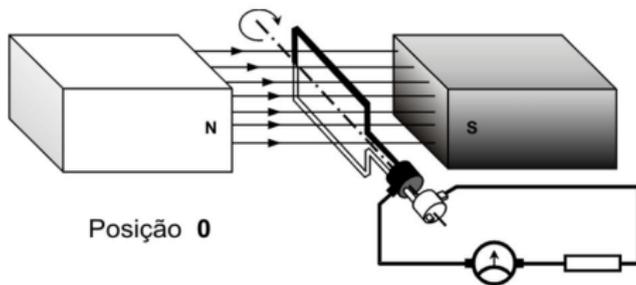


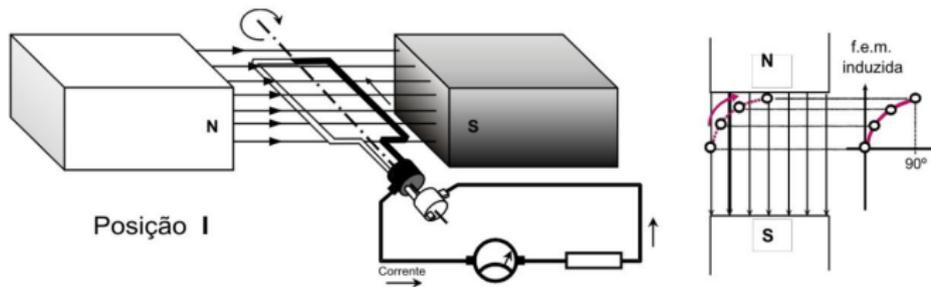
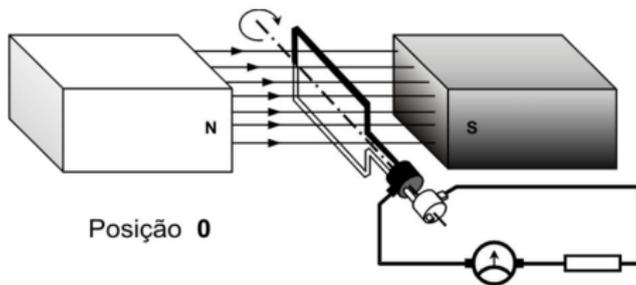
Um exemplo de corrente alternada é a produzida pelo gerador da Fig.. Neste caso, a tensão e a corrente são dadas, respectivamente, por

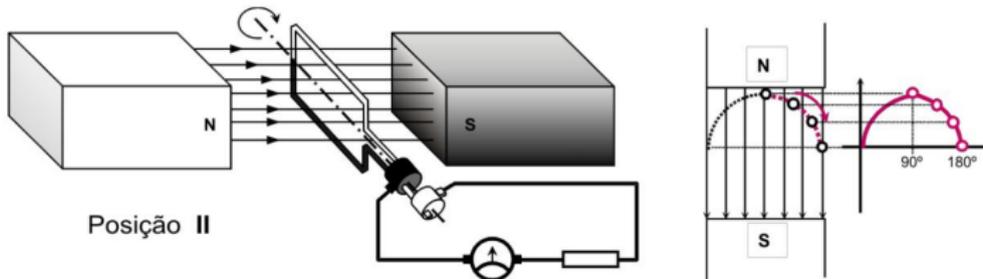
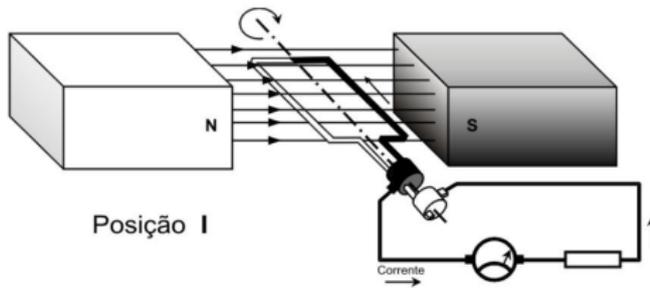
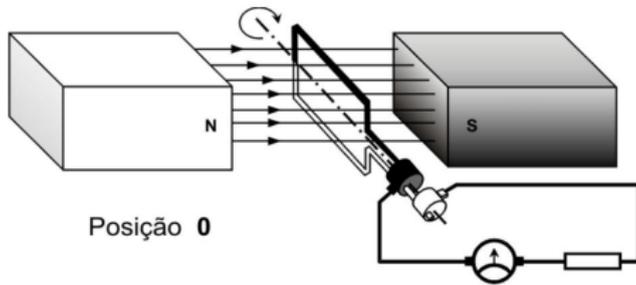
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \text{sen } \omega t, \quad (9.28)$$

$$i = I \text{sen } (\omega t - \varphi), \quad (9.29)$$

em que \mathcal{E}_m é o valor máximo da tensão, I , a amplitude da corrente, ω , a frequência angular de oscilação do gerador e φ , o ângulo de fase entre a corrente e a tensão.



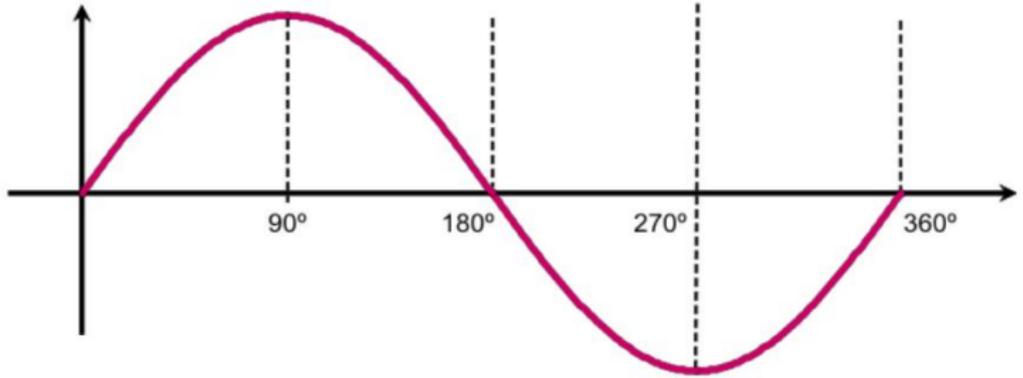




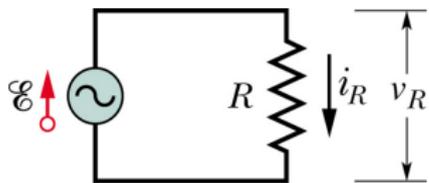


Posição:

0 I II III 0



9.3.2 Circuito R



Pela segunda lei de Kirchoff, temos

$$\mathcal{E} - v_R = 0 \therefore$$

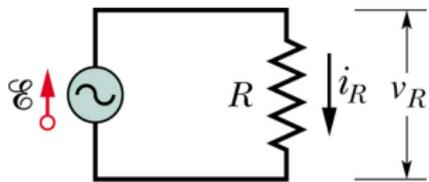
$$\therefore \mathcal{E} = v_R.$$

De acordo com a Eq. (9.28), temos

$$v_R = \mathcal{E}_m \text{sen } \omega t. \quad (9.30)$$

Como a amplitude da tensão entre os terminais do resistor, V_R , é igual à \mathcal{E}_m da fem, podemos escrever

$$v_R = V_R \text{sen } \omega t. \quad (9.31)$$



Deste modo, pela lei de Ohm, temos

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R} \text{sen } \omega t. \quad (9.32)$$

De acordo com a Eq. (9.29), temos

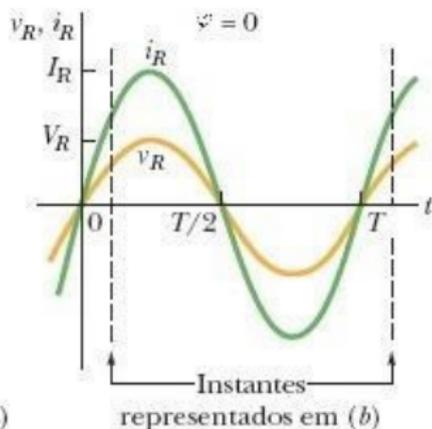
$$i_R = I_R \text{sen } (\omega t - \varphi), \quad (9.33)$$

em que I_R é a amplitude de i_R . Comparando (9.33) com (9.32), temos

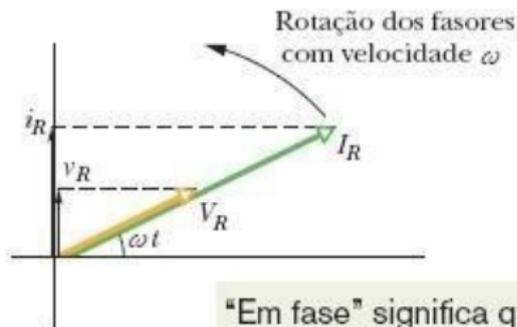
$$V_R = RI_R. \quad (9.34)$$

No caso de uma carga puramente resistiva, $\varphi = 0$.

Se a carga é resistiva, a corrente e a diferença de potencial estão em fase.



(a)

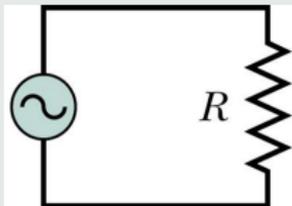


(b)

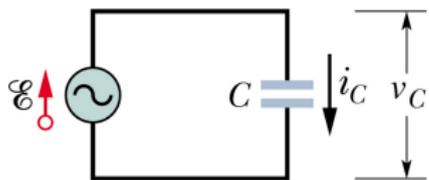
“Em fase” significa que a corrente e a diferença de potencial passam pelo máximo no mesmo instante.

Exemplo 9.9

Na Fig., a resistência é de 200Ω e o gerador produz uma fem de amplitude $36,0 \text{ V}$ e frequência de $60,0 \text{ Hz}$. (a) Qual é a amplitude da ddp entre os terminais do resistor? (b) Qual é a amplitude da corrente no resistor?



9.3.3 Circuito C



Pela segunda lei de Kirchoff, temos

$$\mathcal{E} - v_C = 0 \therefore$$

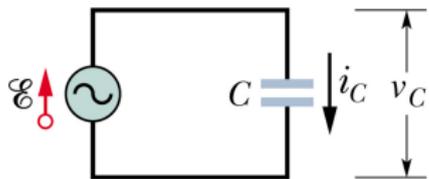
$$\therefore \mathcal{E} = v_C.$$

De acordo com a Eq. (9.28), temos

$$v_C = \mathcal{E}_m \text{sen } \omega t. \quad (9.35)$$

Como a amplitude da tensão entre os terminais do resistor, V_C , é igual à \mathcal{E}_m da fem, podemos escrever

$$v_C = V_C \text{sen } \omega t. \quad (9.36)$$



Usando a definição de capacitância, temos

$$q_C = Cv_C = CV_C \text{ sen } \omega t. \quad (9.37)$$

Derivando-a em relação ao tempo, temos

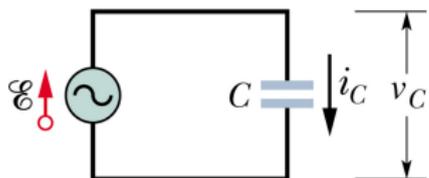
$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega CV_C \text{ cos } \omega t. \quad (9.38)$$

Definindo

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \text{ (reatância capacitiva),} \quad (9.39)$$

temos

$$i_C = \frac{V_C}{X_C} \text{ cos } \omega t. \quad (9.40)$$



Sabendo que

$$\cos \omega t = \text{sen} (\omega t + 90^\circ), \quad (9.41)$$

temos

$$i_C = \frac{V_C}{X_C} \text{sen} (\omega t + 90^\circ). \quad (9.42)$$

De acordo com a Eq. (9.29), temos

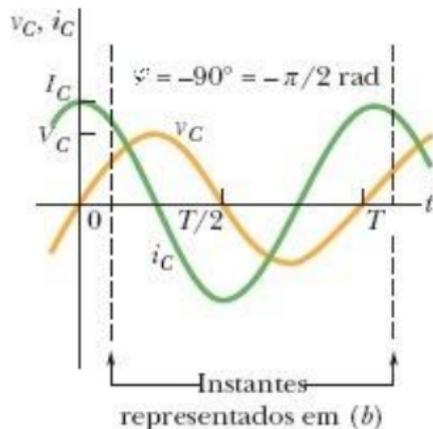
$$i_C = I_C \text{sen} (\omega t + 90^\circ), \quad (9.43)$$

em que I_C é a amplitude de i_C . Comparando (9.43) com (9.42), temos

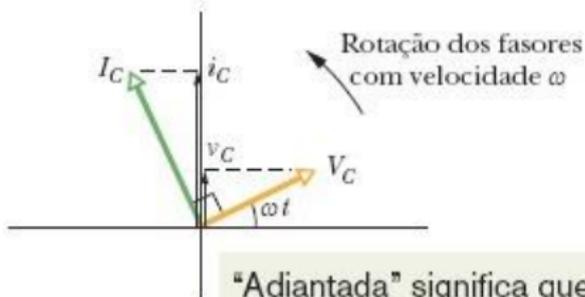
$$V_C = X_C I_C. \quad (9.44)$$

No caso de uma carga puramente capacitiva, $\varphi = 90^\circ$.

Se a carga é capacitiva, a corrente está adiantada de 90° em relação à diferença de potencial.



(a)

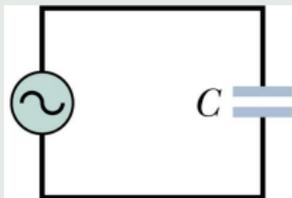


“Adiantada” significa que a corrente passa pelo máximo *antes* da diferença de potencial.

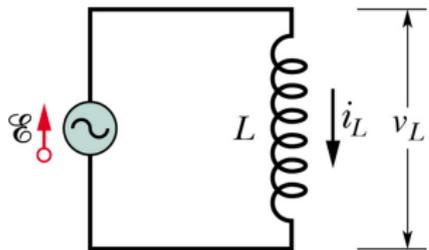
(b)

Exemplo 9.10

Na Fig., a capacitância é de $15,0 \mu\text{F}$ e o gerador produz uma fem de amplitude $36,0 \text{ V}$ e frequência de $60,0 \text{ Hz}$. (a) Qual é a amplitude da ddp entre os terminais do capacitor? (b) Qual é a amplitude da corrente no capacitor?



9.3.4 Circuito L



Pela segunda lei de Kirchoff, temos

$$\mathcal{E} - v_L = 0 \therefore$$

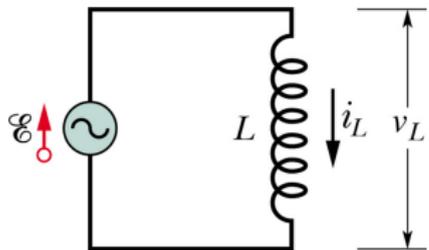
$$\therefore \mathcal{E} = v_L.$$

De acordo com a Eq. (9.28), temos

$$v_L = \mathcal{E}_m \text{sen } \omega t. \quad (9.45)$$

Como a amplitude da tensão entre os terminais do resistor, V_L , é igual à \mathcal{E}_m da fem, podemos escrever

$$v_L = V_L \text{sen } \omega t. \quad (9.46)$$



Usando a definição de indutância, temos

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (9.47)$$

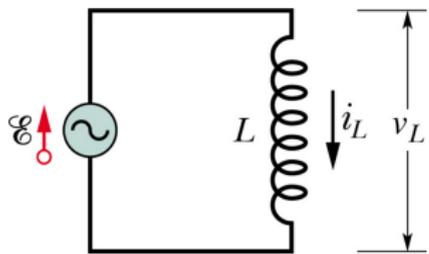
Substituindo (9.46) em (9.47), temos

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L} \text{sen } \omega t. \quad (9.48)$$

Integrando-a em relação ao tempo, temos

$$i_L = \frac{V_L}{L} \int_0^t \text{sen } \omega t' dt' \therefore$$

$$\therefore i_L = - \left(\frac{V_L}{\omega L} \right) \cos \omega t. \quad (9.49)$$



Definindo

$$X_L = \omega L \text{ (reatância indutiva)}, \quad (9.50)$$

temos

$$i_L = -\frac{V_L}{X_L} \cos \omega t. \quad (9.51)$$

Sabendo que

$$\cos \omega t = -\text{sen}(\omega t - 90^\circ), \quad (9.52)$$

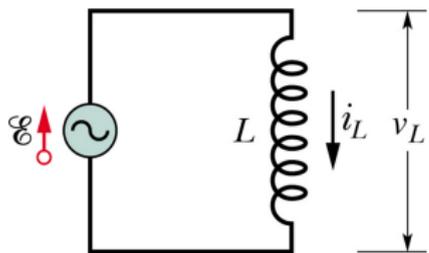
temos

$$i_L = \frac{V_L}{X_L} \text{sen}(\omega t - 90^\circ). \quad (9.53)$$

De acordo com a Eq. (9.29), temos

$$i_L = I_L \text{sen}(\omega t - 90^\circ), \quad (9.54)$$

em que I_L é a amplitude de i_L .

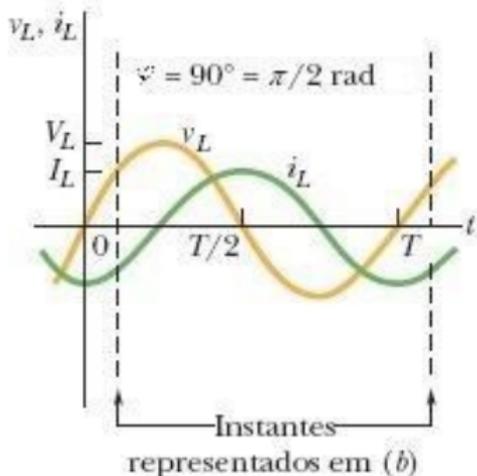


Comparando (9.54) com (9.53), temos

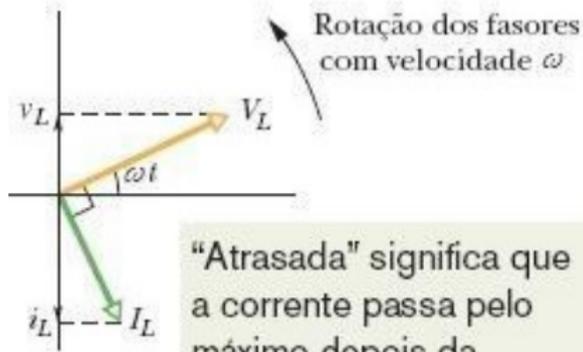
$$V_L = X_L I_L. \quad (9.55)$$

No caso de uma carga puramente indutiva,
 $\varphi = -90^\circ$.

Se a carga é indutiva, a corrente está atrasada de 90° em relação à diferença de potencial.



(a)

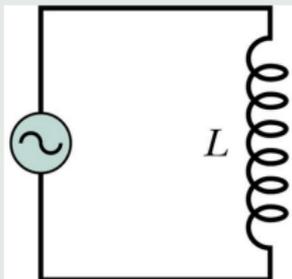


“Atrasada” significa que a corrente passa pelo máximo depois da diferença de potencial.

(b)

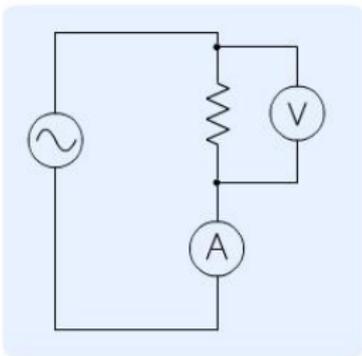
Exemplo 9.11

Na Fig., a indutância é de 230 mH e o gerador produz uma fem de amplitude 36,0 V e frequência de 60,0 Hz. (a) Qual é a amplitude da ddp entre os terminais do indutor? (b) Qual é a amplitude da corrente no indutor?



Simulação 9.4

Circuito de CA com um Componente

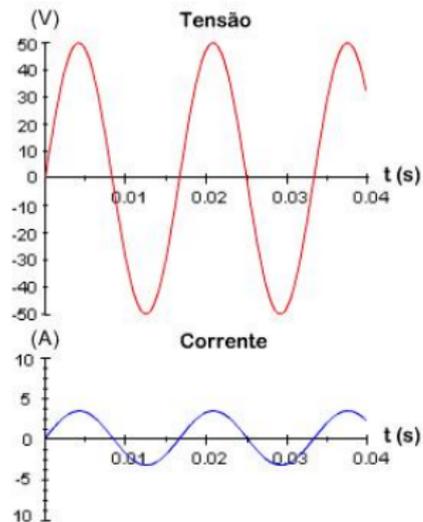


Tensão máxima:

50 V

Corrente máxima:

3.33 A



- Fonte com resistor
- Fonte com capacitor
- Fonte com indutor

Frequência Hz

Resistência ohms

40 100

5 30

Testes Conceituais

Notas

Narrativa



9.3.5 Circuito *RLC* Série

Pela segunda lei de Kirchoff, temos

$$\mathcal{E} - Ri - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C}q = 0 \therefore$$

$$\therefore \mathcal{E} = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q.$$

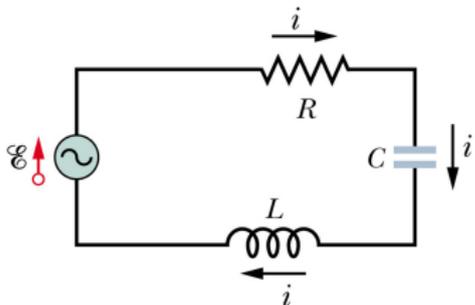
De acordo com a Eq. (9.28), temos

$$\mathcal{E}_m \sin \omega t = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q. \quad (9.56)$$

Derivando-a em relação ao tempo, temos

$$\omega \mathcal{E}_m \cos \omega t = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i \therefore$$

$$\therefore \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m \cos \omega t. \quad (9.57)$$



Supondo

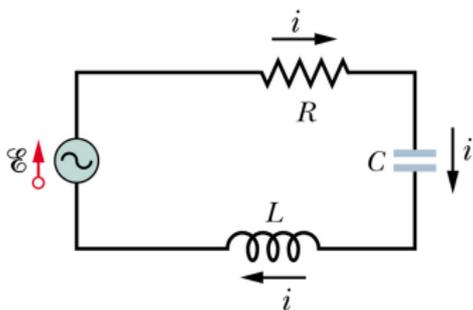
$$i = k_1 \text{sen } \omega t + k_2 \text{cos } \omega t, \quad (9.58)$$

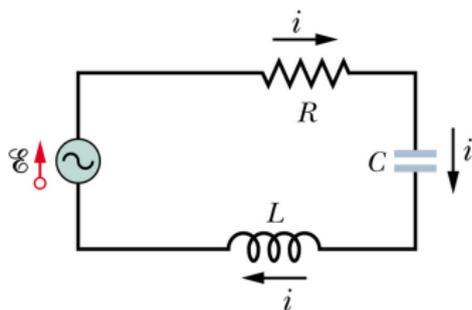
em que k_1 e k_2 são constantes e derivando-a em relação ao tempo, temos

$$\frac{di}{dt} = k_1 \omega \text{cos } \omega t - k_2 \omega \text{sen } \omega t. \quad (9.59)$$

Derivando novamente relação ao tempo, temos

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -k_1 \omega^2 \text{sen } \omega t - k_2 \omega^2 \text{sen } \omega t. \quad (9.60)$$





Substituindo (9.58), (9.59) e (9.60) em (9.57),
temos

$$\begin{aligned}
 & -k_1\omega^2 \text{sen } \omega t - k_2\omega^2 \text{sen } \omega t + \\
 & + \frac{R}{L} (k_1\omega \cos \omega t - k_2\omega \text{sen } \omega t) + \\
 & + \frac{1}{LC} (k_1 \text{sen } \omega t + k_2 \cos \omega t) = \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m \cos \omega t,
 \end{aligned}$$

a qual implica em

$$\begin{aligned}
 & \left(-k_1\omega^2 - \frac{R}{L}k_2\omega + \frac{1}{LC}k_1 \right) \text{sen } \omega t + \\
 & + \left(-k_2\omega^2 + \frac{R}{L}k_1\omega + \frac{1}{LC}k_2 \right) \cos \omega t = \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m \cos \omega t,
 \end{aligned}
 \tag{9.61}$$

da qual, temos

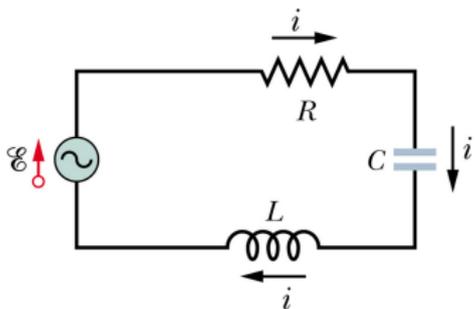
$$\begin{cases} -k_1\omega^2 - \frac{R}{L}k_2\omega + \frac{1}{LC}k_1 = 0, & (9.62) \\ -k_2\omega^2 + \frac{R}{L}k_1\omega + \frac{1}{LC}k_2 = \frac{\omega}{L}\mathcal{E}_m, & (9.63) \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)k_1 - \frac{R}{L}\omega k_2 = 0, & (9.64) \\ \left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)k_2 + \frac{R}{L}\omega k_1 = \frac{\omega}{L}\mathcal{E}_m. & (9.65) \end{cases}$$

Fazendo

$$\begin{cases} a = \frac{1}{LC} - \omega^2, & (9.66) \\ b = \frac{R}{L}\omega, & (9.67) \end{cases}$$



temos

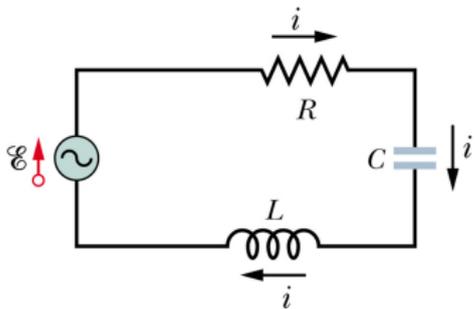
$$\begin{cases} ak_1 - bk_2 = 0, & (9.68) \\ ak_2 + bk_1 = \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m. & (9.69) \end{cases}$$

De (9.68), temos

$$\begin{aligned} ak_1 &= bk_2 \therefore \\ k_1 &= \frac{b}{a} k_2. & (9.70) \end{aligned}$$

Substituindo (9.70) em (9.69), temos

$$\begin{aligned} ak_2 + \frac{b^2}{a} k_2 &= \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m \therefore \\ \therefore (a^2 + b^2) k_2 &= a \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m \therefore \\ \therefore k_2 &= \frac{a}{a^2 + b^2} \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m. & (9.71) \end{aligned}$$

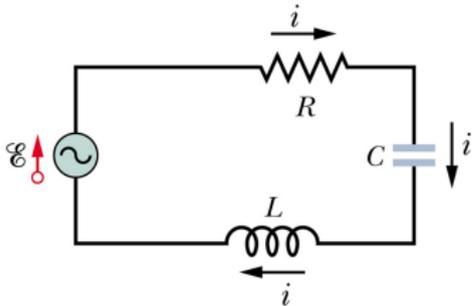


Substituindo (9.71) em (9.70), temos

$$k_1 = \frac{b}{a^2 + b^2} \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m. \quad (9.72)$$

Substituindo (9.71) e (9.72) em (9.58), temos

$$i = \frac{b}{a^2 + b^2} \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m \operatorname{sen} \omega t + \frac{a}{a^2 + b^2} \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m \operatorname{cos} \omega t \therefore$$
$$\therefore i = \frac{\frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m}{a^2 + b^2} (b \operatorname{sen} \omega t + a \operatorname{cos} \omega t). \quad (9.73)$$



Fazendo

$$\begin{cases} \operatorname{cos} \varphi = b, & (9.74) \\ \operatorname{sen} \varphi = -a, & (9.75) \end{cases}$$

temos

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a}{b}. \quad (9.76)$$

Sabendo que

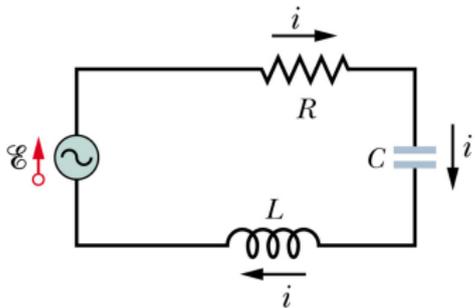
$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1, \quad (9.77)$$

pelas Eqs. (9.74) e (9.75), temos

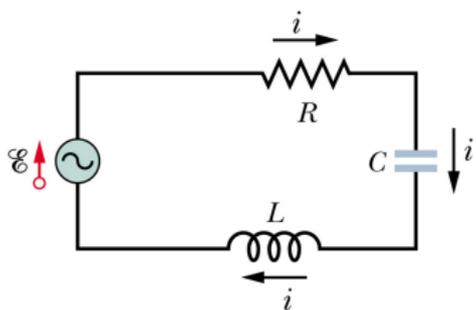
$$a^2 + b^2 = 1. \quad (9.78)$$

Substituindo (9.74) e (9.75) em (9.73), temos

$$i = \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m (\sin \omega t \cos \varphi - \sin \varphi \cos \omega t) \therefore$$
$$\therefore i = \frac{\omega}{L} \mathcal{E}_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (9.79)$$



Substituindo (9.66) e (9.67) em (9.78), temos



$$\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\omega\right)^2 = 1 \therefore$$

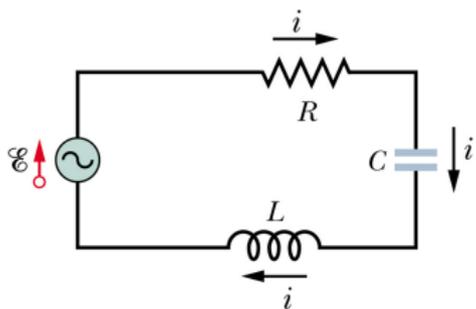
$$\therefore \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 + R^2 \left(\frac{\omega}{L}\right)^2 = 1 \therefore$$

$$\therefore \left[\frac{\omega}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]^2 + R^2 \left(\frac{\omega}{L}\right)^2 = 1 \therefore$$

$$\therefore \left(\frac{\omega}{L}\right)^2 \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2 \right] = 1 \therefore$$

$$\therefore \frac{\omega}{L} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (9.80)$$

Substituindo (9.66) e (9.67) em (9.81), temos



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega^2 - \frac{1}{LC}}{\frac{R}{L}\omega} \therefore \\ \therefore \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\frac{\omega}{L} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{\frac{R}{L}\omega} \therefore \\ \therefore \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \end{aligned} \quad (9.81)$$

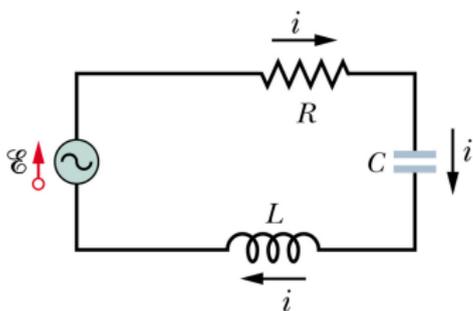
Substituindo (9.80) em (9.79) e de (9.81), respectivamente, temos

$$i = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \text{sen}(\omega t - \varphi), \quad (9.82)$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad (9.83)$$

que é a solução de corrente estacionária. De acordo com a Eq. (9.29), temos

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (9.84)$$



Substituindo (9.39) e (9.50) em (9.84) e (9.83), respectivamente, temos

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \quad (9.85)$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (9.86)$$

Definindo

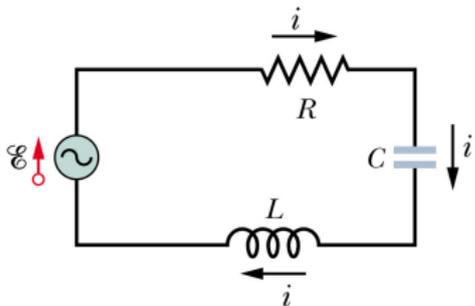
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

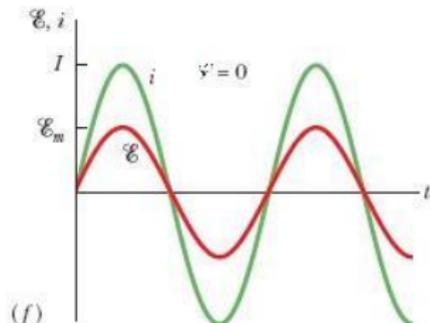
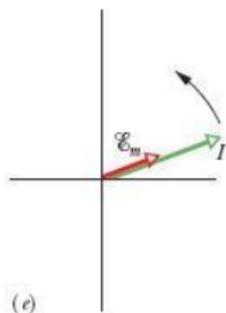
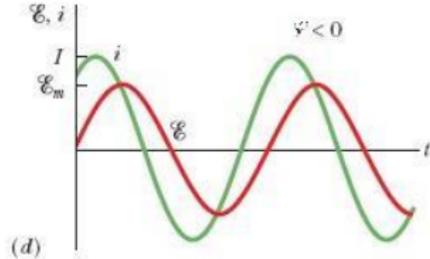
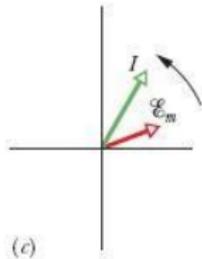
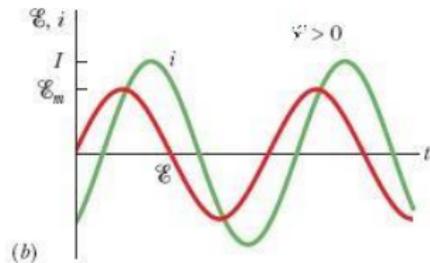
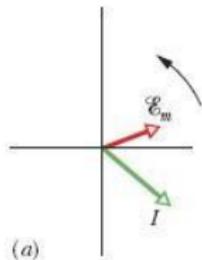
(impedância de um circuito RLC série),

$$(9.87)$$

temos

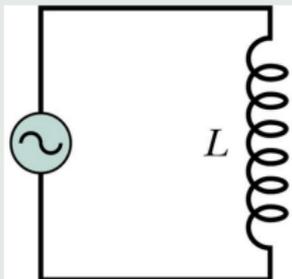
$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}. \quad (9.88)$$





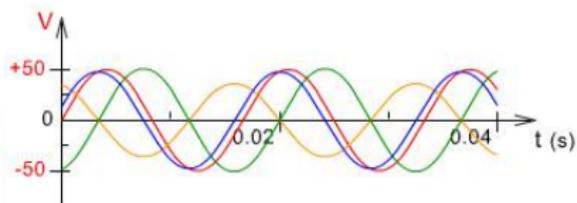
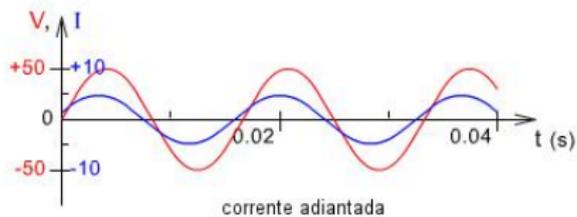
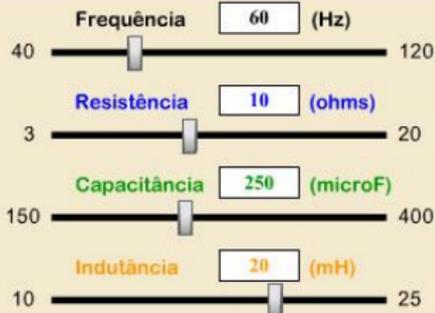
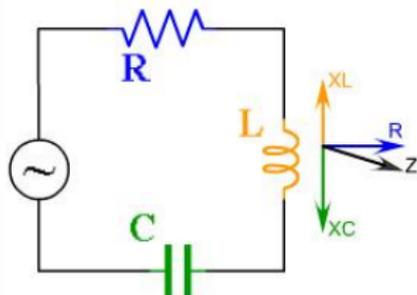
Exemplo 9.12

Na Fig., a indutância é de 230 mH e o gerador produz uma fem de amplitude 36,0 V e frequência de 60,0 Hz. (a) Qual é a amplitude da ddp entre os terminais do indutor? (b) Qual é a amplitude da corrente no indutor?



Simulação 9.5

Circuito RLC



Tensão máxima = 50.0 V
Corrente máxima = 4.78 A
XC = 10.61 ohms
XL = 7.54 ohms
Z = 10.46 ohms
Ângulo de fase = -17.07 graus

Testes Conceituais

Notas

Narrativa



Ressonância

Em um circuito *RLC* série, a amplitude da corrente é máxima quando

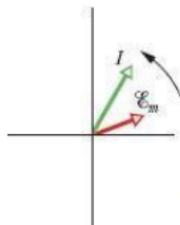
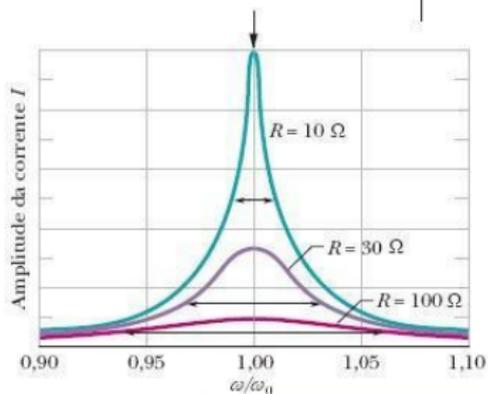
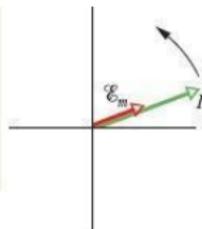
$$\begin{aligned}\omega L - \frac{1}{\omega C} &= 0 \therefore \\ \therefore \omega L &= \frac{1}{\omega C} \therefore \\ \therefore \omega^2 &= \frac{1}{LC} \therefore \\ \therefore \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}}.\end{aligned}\tag{9.89}$$

Neste caso, as frequências angular de oscilação, ω , e natural, ω_0 , são iguais. A Eq. (9.89) é a condição de ressonância, tal que

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (ressonância)}.\tag{9.90}$$

$$\omega = \omega_0$$

- alta amplitude da corrente
- o circuito está em ressonância
- igualmente capacitivo e indutivo
- $X_C = X_L$
- a corrente e a fem estão em fase

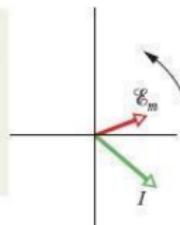


$$\omega < \omega_0$$

- baixa amplitude da corrente
- mais capacitivo
- $X_C > X_L$
- a corrente está adiantada em relação à fem

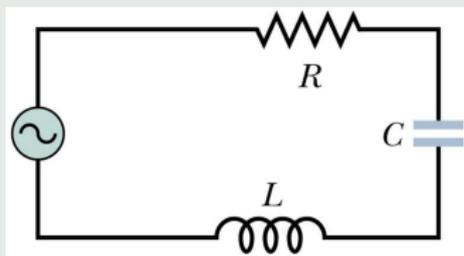
$$\omega > \omega_0$$

- baixa amplitude da corrente
- mais indutivo
- $X_L > X_C$
- a corrente está atrasada em relação à fem



Exemplo 9.13

Na Fig., a resistência é de 200Ω , a capacitância, $15,0 \mu\text{F}$ e a indutância, 230 mH e o gerador produz uma fem de amplitude $36,0 \text{ V}$ e frequência de $60,0 \text{ Hz}$. (a) Qual é a amplitude da corrente no indutor? (b) Qual é o ângulo de fase da corrente no circuito em relação à fem aplicada?



9.3.6 Potência em Circuitos de Corrente Alternada

Em um circuito RLC série, a potência é a taxa temporal de energia dissipada em um resistor. A taxa instantânea, aqui é dada por

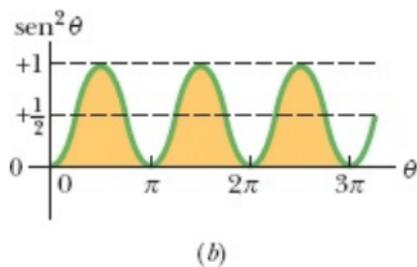
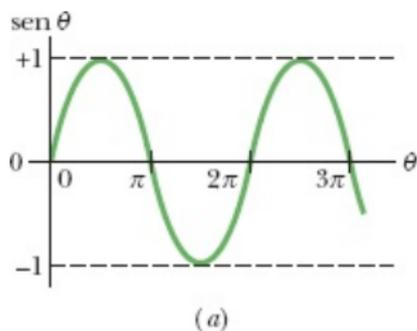
$$P = Ri^2 = R [I \text{sen}(\omega t - \varphi)]^2 = RI^2 \text{sen}^2(\omega t - \varphi) \quad (9.91)$$

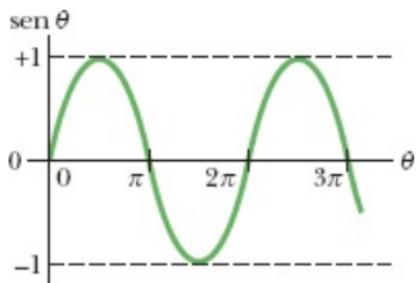
a taxa média, por

$$P_{\text{méd}} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt, \quad (9.92)$$

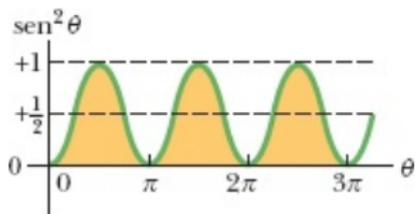
em que T é o período de oscilação. Sendo $T = 2\pi$ e de acordo com a Eq. (9.91), temos

$$P_{\text{méd}} = \frac{RI^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\omega t - \varphi) dt \therefore$$
$$\therefore P_{\text{méd}} = R \frac{I^2}{2} = R \left(\frac{I}{\sqrt{2}} \right)^2, \quad (9.93)$$





(a)



(b)

que pode ser reescrita como

$$P_{\text{méd}} = RI_{\text{rms}}^2, \quad (9.94)$$

em que

$$I_{\text{rms}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad (9.95)$$

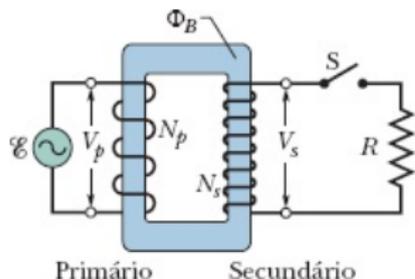
é o valor quadrático médio, eficaz ou rms (*root mean square*) da corrente I . Analogamente, para a tensão e para a fem, respectivamente, temos

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \text{ e } \mathcal{E}_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}. \quad (9.96)$$

Exemplo 9.14

Um circuito RLC série, alimentado por uma fonte com fem rms de 120 V e frequência de 60,0 Hz, contém uma resistência de $200\ \Omega$, uma indutância com uma reatância indutiva de $80,0\ \Omega$ e uma capacitância com uma reatância capacitiva de $150\ \Omega$. Qual é a potência média com a qual a energia é dissipada na resistência?

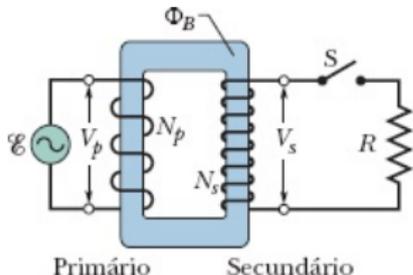
9.3.7 Transformadores



Um transformador é um dispositivo capaz de aumentar ou diminuir a tensão alternada sem alterar a potência. O tipo mais simples é formado por duas bobinas com diferentes números de espiras, enroladas em um mesmo núcleo de ferro.

Chave aberta:

O fluxo do campo magnético alternado, Φ_B , é o mesmo nos enrolamentos primário e secundário. Como este varia no tempo, induz uma fem em cada espira, tal que



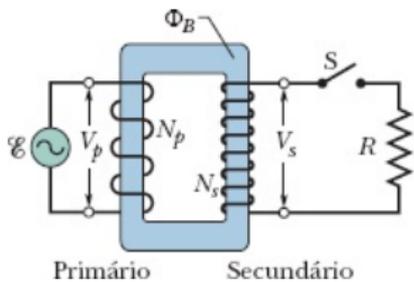
$$\mathcal{E}_{\text{espira}} = \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (9.97)$$

As tensões nos enrolamentos primário e secundário são dadas, respectivamente, por

$$V_p = N_p \mathcal{E}_{\text{espira}}, \quad (9.98)$$

$$V_s = N_s \mathcal{E}_{\text{espira}}, \quad (9.99)$$

em que N_p e N_s são os respectivos números de espiras.



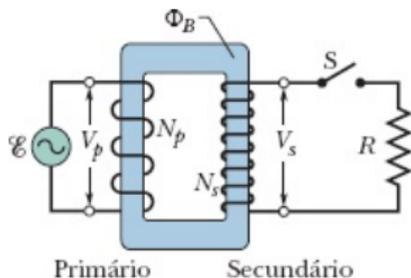
Deste modo,

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p},$$

a qual implica em

$$V_s = V_p \frac{N_s}{N_p} \text{ (transformação de tensão). (9.100)}$$

$$\text{Se } N_s \begin{cases} > N_p \therefore V_s > V_p \text{ (transformador elevador de tensão)} \\ < N_p \therefore V_s < V_p \text{ (transformador abaixador de tensão)} \end{cases} .$$



Chave fechada:

Pela conservação de energia e desprezando as perdas nos enrolamentos, temos

$$V_p I_p = V_s I_s,$$

a qual implica em

$$I_s = I_p \frac{V_p}{V_s}. \quad (9.101)$$

Substituindo (9.102) em (9.101), temos

$$I_s = I_p \frac{N_p}{N_s} \text{ (transformação de corrente).} \quad (9.102)$$

Exemplo 9.15

Um transformador instalado em um poste funciona com uma tensão de 8,50 kV no enrolamento primário e fornece energia elétrica a várias casas das vizinhanças com um tensão de 120 V no enrolamento secundário. As duas tensões são valores rms. Suponha que o transformador seja ideal e a carga seja resistiva. (a) Qual é a razão entre os números de espiras dos enrolamentos primário e secundário do transformador? (b) A potência média consumida nas casas atendidas pelo transformador é 78 kW. Quais são as correntes rms nos enrolamentos primário e secundário do transformador?

Desafio 9.1

Resolva o circuito da Fig..

