Aula 15

Diagonalização Matrizes Simétricas

Def. $P \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal se $P^t = P^{-1}$.

Proposição: $P \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal se suas colunas formam um conjunto ortonormal de vetores.

dem.

$$I = P^{-1}P = P^tP = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$$

P_i i-ésima coluna de P

$$= \begin{pmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle & \cdots & \langle P_1, P_n \rangle \\ \vdots & & \\ \langle P_n, P_1 \rangle & \cdots & \langle P_n, P_n \rangle \end{pmatrix}$$

$$\therefore \langle P_i, P_j \rangle = \delta_{ij}$$

Exemplo. São ortogonais:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

OBS: Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Então

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} \quad e \quad \overline{\alpha A} = \bar{\alpha}\bar{A}.$$

Proposição: Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz com entradas reais. Suponha que $\lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ é autovalor de A. Então $\bar{\lambda}$ também é autovalor de A e

$$\overline{Aut(\lambda)} = Aut(\bar{\lambda}).$$

dem. $Au = \lambda u \Longrightarrow \overline{Au} = \overline{\lambda u}$

$\Longrightarrow \bar{A}\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u} \Longleftrightarrow A\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$ já que

$A \in M_n(\mathbb{R})$. $\blacksquare$

Def: $A \in M_n(\mathbb{C})$ é simétrica se $A^t = A$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ são simétricas.

Lema. Toda matriz simétrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ possui autovalor real.

dem. Seja $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomio característico de A. Vamos mostrar que suas raízes são simétricas. Para tanto seja $\lambda \in \mathbb{C}$ raiz de $p(\lambda)$ e $u \in \mathbb{C}^n$ autovetor associado. Logo

$$Au = \lambda u \rightsquigarrow A\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}. \quad \text{Assim}$$

$$\bar{u}^t A u = (A^t \bar{u})^t u = (A\bar{u})^t u = \bar{\lambda}\, \bar{u} u = \bar{\lambda} \|u\|^2$$

Por outro lado $\bar{u}^t A u = \bar{u}^t \lambda u = \lambda \|u\|^2$, e daí,

$$\bar{\lambda} = \lambda \rightsquigarrow \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

Teo. Toda matriz simétrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável com uma matriz ortogonal. Isto é, $\exists\, P \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que

$$A = PDP^t$$

com D diagonal.

dem. Prova por indução. Se $n=1$, o resultado é claro.

Suponha verdadeiro para $A \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Vamos verificar que também é verdade para $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica. Pelo Lema anterior A possui pelo menos um autovalor real.

Seja v_1 autovalor associado a λ com $\|v_1\|=1$.

Considere base ortonormal $\mathcal{B}=\{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ um completamento de $\{v_1\}$. Considere a matriz ortogonal

$$P_1 = [v_1 \cdots v_n] \in M_n(\mathbb{R}).$$

Como $Av_1 = \lambda v_1$ e $Av_i \in [v_1, \dots, v_n]$ $i=2,\dots,n$

temos que $AP_1 = [Av_1 \cdots Av_n]$

$$= [v_1 \cdots v_n] M = P_1 M$$

para algum $M \in M_n(\mathbb{R})$. Veja que $M = P_1^t A P_1$ já que P_1 é ortogonal.

Note que $M = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$.

Além disso $M^t = \left(P_1^t A P_1\right)^t = P_1^t A^t P_1 = P_1^t A P_1 = M$.

Assim M também é simétrica que nos dá

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \text{ com } B \in M_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ simétrica.}$$

Usando a hipótese de indução, obtemos que

$\exists\, P_2 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ ortogonal tal que

$$P_2^t B P_2 = D_2 \in M_{n-1}(\mathbb{R}) \quad D_2 \text{ diagonal.}$$

Defina $P_3 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$. Veja que P_3 é ortogonal

Seja agora $P = P_1 P_3$. P também é ortogonal

e

$$AP = AP_1P_3 = P_1 M P_3 = P_1 \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & BP_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

$$= P_1 \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 D_2 \end{array}\right] = P_1P_3 \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad P^t A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

OBS: Note que se $T: U \to U$ linear com U $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\exists$ base $\mathcal{E}$ de U tal que $[T]_{\mathcal{E}}$ é simétrica, então T é diagonalizável.

Exemplo: Considere $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Encontre $P \in M_2(\mathbb{R})$ ortogonal e $D \in M_2(\mathbb{R})$ diagonal tal que $A = PDP^t$.

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Atividade 4
Matrizes Simétricas

1) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica. Suponha que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ são autovalores de A. Mostre que $u_1 \cdot u_2 = 0$ $\quad \forall u_i \in Aut(\lambda_i)$ $\; i = 1, 2$.

2) Considere $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Encontre $P \in M_3(\mathbb{R})$ ortogonal e $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonal tal que $A = PDP^t$.

3) Mostre que se A é diagonalizável por uma matriz ortogonal então A é simétrica.