

## MAT0147 - Cálculo Diferencial e Integral II (FEA-noturno)

GAB Prova P2 (6.0 pt) - 29/11/2023

Prova foi baseada nos Guias Resumidos 2, 3 de Cálculo II e Lista 1 de Cálculo II.

- Compare Questão 1 com: Exemplo 16 e Seção 9 do Guia 3.
- Compare Questão 2 com: Exemplo 7 e Problema 15 do Guia 3.
- Compare Questões 1 e 2 com: Problemas 2.5, 2.6, 3.11, 3.12 e 3.14 da Lista 1.

**Questão 1** (3,0 pt). Seja  $u : ((0, +\infty) \times (0, +\infty)) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  função utilidade definida como  $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ .

- (a) Determine a equação da reta tangente a curva de nível de  $u$  (curva de indiferença) no ponto  $p = (4, 9)$
- (b) Considere  $C = \{x \in \mathbb{R}^2 | 2x_1 + 3x_2 = 10; x_1 > 0, x_2 > 0\}$  a curva que descreve um vínculo orçamentário.
- (b.1) Encontre  $q \in C$  tal que  $u(q) = \max_{x \in C} u(x)$ , ou seja o ponto no vínculo orçamentário que assume a maior utilidade.
- (b.2) Esboce o vínculo orçamentário  $C$  e a curva indiferença passando pelo ponto  $q$  determinado no item (b.1) acima, destacando os eixos coordenados.

**Respostas:**

(a)  $\frac{3}{4}(x_1 - 4) + \frac{1}{3}(x_2 - 9) = 0$

(b.1)  $q = (\frac{5}{2}, \frac{5}{3})$

(b.2) Vide Figura 1

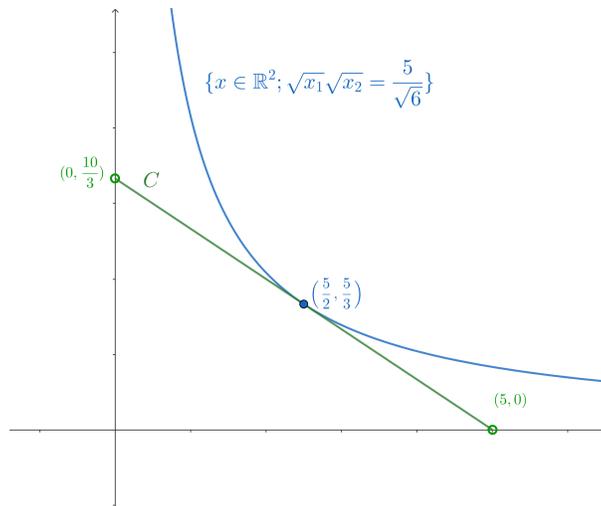


Figura 1: Questão 1 item (b.2)

**Questão 2** (3,0 pt). Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação definida como:

$$F(r, \theta) = (3r \cos(\theta), 2r \sin(\theta))$$

- (a) Determine a (matriz) derivada  $DF(r, \theta)$
- (b) Seja  $C$  a imagem da curva parametrizada  $\theta \rightarrow F(1, \theta)$  com  $\theta \in [0, 2\pi]$ .
- (b.1) Determine as 2 retas paralelas a  $x_1 + x_2 = 0$  tangentes a elipse  $C$ , ou seja determine as 2 retas  $x_1 + x_2 = w$  tangentes a  $C$ .
- (b.2) Esboce a elipse  $C$  e as duas retas tangentes a  $C$  paralelas a  $x_1 + x_2 = 0$  ou seja as retas determinadas no item (b.1), destacando os eixos coordenados.

**Respostas:**

(a)  $DF(r, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cos(\theta) & -3r \sin(\theta) \\ 2 \sin(\theta) & 2r \cos(\theta) \end{bmatrix}$

(b.1)  $x_1 + x_2 = \sqrt{13}$  e  $x_1 + x_2 = -\sqrt{13}$

(b.2) Vide Figura 2

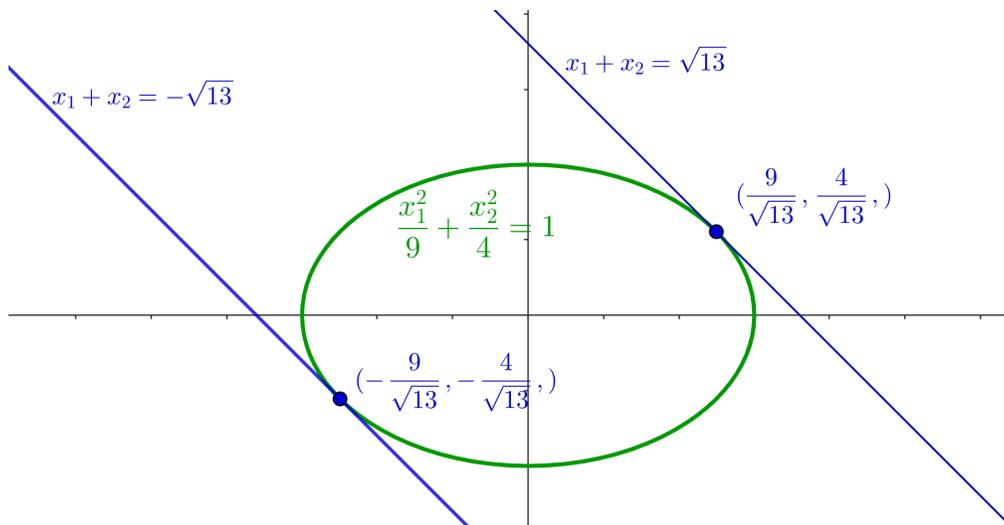


Figura 2: Questão 2 item (b.2)