Computação III - 2º semestre de 2023

Provão 2 - Data de entrega: 19/12/2023

1. Denote por T_n e S_n as fórmulas de n-Trapézios e n-Simpsons, respectivamente. Prove que

$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}.$$

Verifique também que se $h = (b-a)/n$, então

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} f(x'_j)$$

onde $x'_j = a + (2j-1)\frac{h}{2}$, $1 \leq j \leq n$.

2. Prove que a fórmula de Simpson para aproximar a integral de uma função f no intervalo $[a,b]$ é exata para polinômios de grau menor ou igual a 3. Conclua que a expressão para a fórmula de Simpson é igual a $\int_a^b q_3(x)\,dx$, onde q_3 é *qualquer* polinômio de grau menor ou igual a 3 que satisfaz $q_3(a) = f(a)$, $q_3(m) = f(m)$ e $q_3(b) = f(b)$, onde $m = (a+b)/2$.

3. Seja $f \in C^4([a,b])$ e seja $\tilde{q}_3$ o único polinômio, de grau menor ou igual a 3, interpolador da tabela

x	a	m	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(m)$	$f(b)$
$f'(x)$		$f'(m)$	

onde $m = (a+b)/2$. Prove que dado $x \in [a,b]$, existe $t_x \in [a,b]$ tal que o erro $E(x) = f(x) - \tilde{q}_3(x)$ satisfaz

$$E(x) = \frac{f^{(4)}(t_x)}{4!}(x-a)(x-m)^2(x-b).$$

Sugestão: Prove que para $\bar{x} \in [a,b]$ fixo, diferente de a, m e b, a derivada quarta da função

$$F(x) = W(\bar{x}) \cdot E(x) - E(\bar{x}) \cdot W(x)$$

tem pelo menos uma raiz $t_{\bar{x}}$ em $[a,b]$, onde $W(x) = (x-a)(x-m)^2(x-b)$.

4. Usando os resultados das Questões **2** e **3** prove que, se $f \in C^4([a,b])$, então o erro para a fórmula de 1-Simpson é igual a

$$-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(t)$$

para algum $t \in [a,b]$, onde $h = (b-a)/2$. Deduza então a fórmula do erro para n-Simpsons.