MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II - 2023
Lista 8

1. Multiplicadores de Lagrange em Subconjuntos Compactos de $\mathbb{R}^n$

1. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f em D, onde:

a) $f(x,y) = xy$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^5 + 5x^2 + 6xy - 64 = 0\}$
b) $f(x,y,z) = xyz$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6\}$
c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
d) $f(x,y,z) = x + y + z$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 4x + 4y = z^2\}$
e) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}$
f) $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$
g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } z \geq 0\}$

2. Determine o valor máximo e o valor mínimo de $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$ em D, onde:

a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2x + y + 4 = 2z\}$
b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2x + y + 4 \geq 2z\}$

3. Determine o valor máximo e o valor mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 = 2z^2 - 4xy - 4z$ em D, onde:

a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$
b) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
c) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$
d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$
e) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } x + y \leq z\}$

2. Multiplicadores de Lagrange em Subconjuntos Arbitrários de $\mathbb{R}^n$

Cada problema desta seção admite solução; encontre-a e justifique sua existência.

1. Encontre o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ mais próximo de $(1,1,1)$.

2. Encontre os pontos da superfície $y^2 - xz = 4$ que estão mais próximos de $(0,0,0)$ e determine a distância mínima. Existe distância máxima? Justifique.

3. Encontre os pontos da superfície $xyz = 8$ mais próximos de $(0,0,0)$.

4. Encontre os pontos da intersecção das superfícies $xyz = 8$ e $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ mais próximos de $(0,0,0)$.

5. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100.

6. Determine o valor máximo de $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, onde α, β e γ são os ângulos de um triângulo.

7. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, inscrito no elipsoide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.

8. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.

9. **(MAT0121 - Sub 2021)** Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo que possui faces paralelas aos planos coordenados, uma das quais está contida na região

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2 + 16y^2 \leq 8 \text{ e } z = 0\right\},$$

e tal que a respectiva face oposta tem vértices no paraboloide de equação $z = -9x^2 - 16y^2$.

10. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

11. Determine uma equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

12. Encontre os planos tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ que estão mais distantes de $(0,0,0)$.

13. Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27 cm^2 de papelão.

14. **(MAT2454 - Sub 2020)** Considere o elipsoide $S : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$. Seja (a, b, c) um ponto deste elipsoide pertencente ao primeiro octante.

a) Determine, em termos de (a, b, c), uma equação do plano tangente a S em (a, b, c).

b) Considere o tetraedro formado pelo plano do item anterior e pelos planos coordenados. Determine (a, b, c) de modo que o tetraedro obtido tenha volume mínimo.

3. Multiplicadores de Lagrange e Diagonalização em Bases Ortonormais

Seja M uma matriz $n \times n$ simétrica (com coeficientes reais). O objetivo desta seção é apresentar um roteiro para provar, usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, que existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de M. Considere, nos enunciados a seguir, a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associada a M definida por $Q(x) = \langle Mx, x\rangle$.

1. Mostre que $\langle Mx, y\rangle = \langle My, x\rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$. (*Sugestão:* escreva $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ e desenvolva os dois membros da igualdade acima, lembrando que $a_{ij} = a_{ji}$.)

2. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

a) Mostre que $\dfrac{\partial Q}{\partial x_i}(x) = 2\langle Mx, e_i\rangle$ para todos $1 \leq i \leq n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Conclua que Q é de classe $\mathscr{C}^1$. (*Sugestão:* note que $Q(x+te_i) = \langle Mx, x\rangle + t\langle Mx, e_i\rangle + t\langle Me_i, x\rangle + t^2\langle Me_i, e_i\rangle$ e use a definição de derivada parcial.)

b) Mostre que $\nabla Q(x) = 2Mx$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. (*Sugestão:* compare esses dois vetores coordenada a coordenada usando o item anterior.)

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle x, x\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. A superfície de nível $c = 1$ de f é a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$, denotada por S_1.

a) Mostre que Q admite máximo e mínimo globais em S_1.

b) Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, mostre que os pontos de máximo locais e os pontos de mínimo locais de Q em S_1 são autovetores de M.

c) Conclua que os valores máximo e mínimo de Q em S_1 são, respectivamente, o maior e o menor autovalor de M.

4. Neste exercício, vamos provar, por indução em $n \geq 1$, que existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de M.

a) Prove o caso $n = 1$.

Suponha, agora, que o resultado seja válido para algum $n \geq 1$.

b) Use o exercício anterior para provar que M possui um autovalor λ_{n+1} e fixe um autovetor unitário v_{n+1} de M associado a tal autovalor.

c) Fixe uma base *ortonormal* $\{u_1, \ldots, u_n, v_{n+1}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ e considere a matriz (*simétrica*) $n \times n$

$$N = \begin{bmatrix} \langle Mu_1, u_1\rangle & \langle Mu_2, u_1\rangle & \cdots & \langle Mu_n, u_1\rangle \\ \langle Mu_1, u_2\rangle & \langle Mu_2, u_2\rangle & \cdots & \langle Mu_n, u_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Mu_1, u_n\rangle & \langle Mu_2, u_n\rangle & \cdots & \langle Mu_n, u_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Use a Hipótese de Indução para obter uma base ortonormal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de N, associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

d) Escrevendo $w_i = \left(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i\right)$ e igualando as coordenadas de Nw_i e $\lambda_i w_i$, mostre que

$$\lambda_i \alpha_j^i = \sum_{k=1}^{n} \left\langle Mu_k, u_j \right\rangle \alpha_k^i \tag{1}$$

para todo $1 \leq j \leq n$.

e) Para cada $1 \leq i \leq n$, defina $v_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i u_j \in \mathbb{R}^{n+1}$. Mostre que cada v_i é autovetor de M e que $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ é ortonormal. (*Sugestão:* como $\{u_1, \ldots, u_n, v_{n+1}\}$ é ortonormal, cada vetor $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ se escreve de forma única como

$$x = \sum_{j=1}^{n} \left\langle x, u_j \right\rangle u_j + \langle x, v_{n+1}\rangle v_{n+1}.$$

Use a decomposição acima para mostrar que

$$Mu_k = \sum_{j=1}^{n} \left\langle Mu_k, u_j \right\rangle u_j, 1 \leq k \leq n. \tag{2}$$

Substituindo as expressões (1) e (2) em $Mv_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i Mu_k$, conclua que $Mv_i = \lambda_i v_i$. Para provar que $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ é ortonormal, observe que

$$\left\langle v_i, v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k^i \alpha_l^j \underbrace{\langle u_k, u_l\rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i \alpha_k^j = \left\langle w_i, w_j \right\rangle = \delta_{ij}$$

e que

$$\langle v_i, v_{n+1}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k \langle u_k, v_{n+1}\rangle = 0$$

para todos $1 \leq i, j \leq n$.