FCM0101 — Física I

3ª Lista de exercícios

Diferenciação

1. Considere a função $y(x) = 2x^3$.
   a) Calcule a derivada da função. Quanto vale a derivada no ponto $x = 1$?
   b) Calcule a inclinação das retas secantes à função $y(x)$ nas coordenadas
      i. $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$?
      ii. $x_1 = 1$ e $x_2 = 1.1$?
      iii. $x_1 = 1$ e $x_2 = 1.01$?

   Compare com a inclinação da reta tangente a $y(x)$ no ponto $x = 1$.

2. Repita o problema anterior para a função $y(x) = e^{-x}$. Para facilitar, aproveite a tabela abaixo:

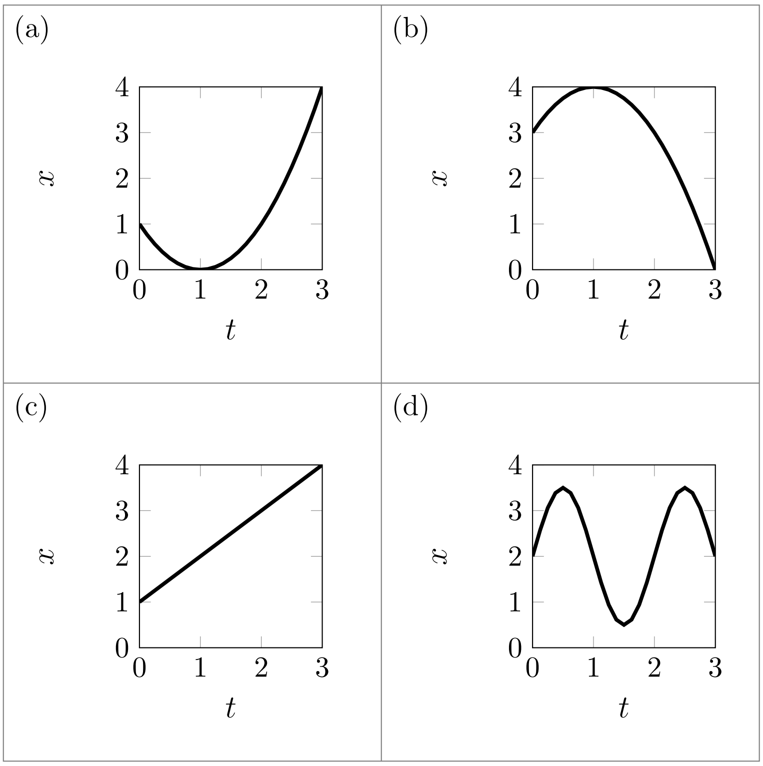
x	$\exp(-x)$
1	0.368
1.01	0.364
1.1	0.333
2	0.135

3. Qual é a inclinação da reta tangente à função $y(x) = \mathrm{sen}(x)$ no ponto $x = 0$? Responda a essa pergunta de duas formas:
   a) Faça um gráfico e estime a inclinação
   b) Calcule a derivada da função $\mathrm{sen}(x)$ e calcule exatamente a inclinação.

4. Esboce o gráfico da função $y(x) = \mathrm{sen}(2x)$ em função de x entre $x = 0$ e $x = \pi$. A partir da interpretação geométrica da derivada, mostre claramente no gráfico os trechos onde dy/dx é positiva, nula ou negativa.

5. Calcule a derivada de $y(x) = \mathrm{sen}(2x)$ em relação a x, trace seu gráfico e identifique no gráfico os trechos onde dy/dx é positiva, nula ou negativa. Compare o resultado com o obtido na questão 6.

6. Nas figuras abaixo, diga se a velocidade no instante $t_1 = 0$ é maior, menor ou igual à velocidade no instante $t_2 = 2$.



7. Calcule a derivada da função $y(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$. Uma vez obtido o resultado, escreva-o na forma $dy/dx = A\cos(x - \alpha)$, onde A e α são constantes que você deverá determinar.

8. Escreva a função $y(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$ na forma $y(x) = B\cos(x - \beta)$, onde B e β são constantes que você deverá determinar. A partir dessa forma, com ajuda da regra da cadeia, encontre a derivada dy/dx. Compare com o resultado da questão anterior.

9. Esboce o gráfico da função $y = x^3 - x$, no intervalo entre $x = -2$ e $x = 2$ e, a partir do gráfico, identifique aproximadamente os pontos onde a derivada é nula. Em seguida, calcule a derivada dy/dx e, a partir do resultado, encontre exatamente os pontos onde a derivada é nula. Compare com os resultados obtidos do gráfico.

10. A partir da expressão $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{sen}(x)/\cos(x)$ e da regra para a derivada do quociente, encontre a derivada da função $y(x) = \operatorname{tg}(x)$ em relação a x.

11. Siga os passos do problema anterior para calcular a derivada da função $y(x) = \operatorname{cotg}(x)$ em relação a x, a partir da expressão $\operatorname{cotg}(x) = \cos(x)/\operatorname{sen}(x)$.

12. A partir da regra para a derivada do quociente, encontre a derivada da função $y(x) = 1/f(x)$ em relação a x, onde $f(x)$ é uma função qualquer que nuca se anula.

13. Para calcular a derivada de $y(x) = 1/f(x)$ em relação a x, escreva agora que

$$y(x) = X^{-1},$$

onde $X = f(x)$ e combine a regra do tombo com a regra da cadeia.

14. Calcule as derivadas em relação a x das seguintes funções

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \operatorname{sen}^2(x) \\ f_2(x) &= \operatorname{sen}(x)\cos(x) \\ f_3(x) &= \cos^2(x) \\ f_4(x) &= 2\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) \\ f_5(x) &= \operatorname{tg}^2(x) \\ f_6(x) &= \operatorname{cotg}^2(x). \end{aligned}$$

15. Veremos mais adiante que no lançamento de um projétil, a trajetória do objeto é dada pela igualdade

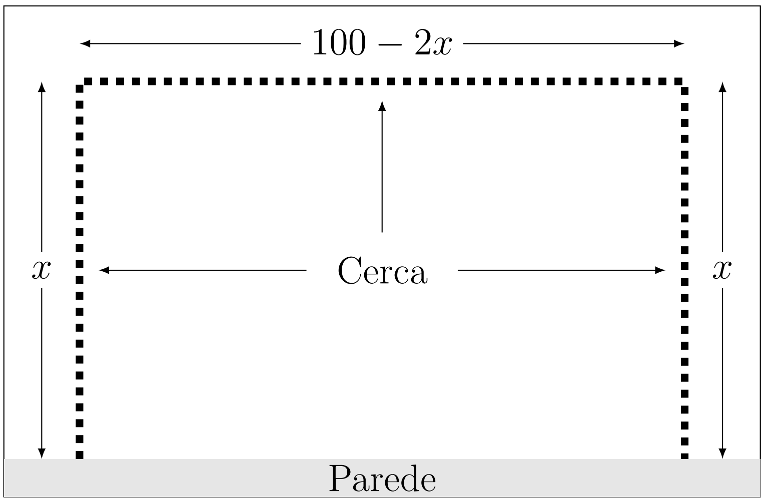
$$y(x) = \operatorname{tg}(\theta)x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2(\theta)},$$

onde v_0, g e θ são constantes (a velocidade inicial, a aceleração da gravidade e o ângulo de lançamento, respectivamente).

   a) Encontre a abscissa x em que $y(x)$ é máximo. *Dica:* a derivada dy/dx se anula quando a altura é máxima.

   b) Encontre a altura máxima alcançada pelo projétil.

16. Uma pecuarista dispõe de 100 m de cerca e deseja cercar uma área retangular apoiada numa parede para criar ovelhas. Ela desenha o cercado como mostra a figura abaixo, calcula a área $y(x)$ do retângulo e escolhe x de forma a maximizar a área do cercado.



Reproduza o raciocínio da pecuarista e determine o valor de x que maximiza a área. *Dica:* a derivada dy/dx se anula quando a área $y(x)$ é máxima.

17. Calcule a derivada dy/dx da função $y(x) = e^{-2x}$ de três maneiras

    a) Escreva que $y(x) = e^{-x}e^{-x}$ e empregue a regra do produto.

    b) Escreva que $y(x) = e^{X}$, onde $X = -2x$ e empregue a regra da cadeia.

    c) Escreva que $y(x) = X^{-2}$, onde $X = e^{x}$ e empregue a regra da cadeia.

18. Calcule a derivada dy/dx da função $y(x) = \ln(x^2)$. *Dica:* escreva $y(x) = \ln(X)$, onde $X = x^2$ e empregue a regra da cadeia.

19. Calcule a derivada dy/dx da função $y(x) = e^{\ln(x)}$. *Dica:* escreva $y(x) = e^{X}$, onde $X = \ln(x)$ e empregue a regra da cadeia. Interprete o resultado.

20. Calcule as derivadas

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$
$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}$$
$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}(x)}$$

21. A posição de uma partícula é dada, em função do tempo, pela igualdade

$$x(t) = te^{-t}.$$

    a) Esboce em gráfico a posição em função do tempo e identifique os trechos onde a velocidade é positiva ou negativa.

    b) Calcule a velocidade em função do tempo e encontre o instante t em que ela se anula.