

Lógica Fuzzy (Lógica Nebulosa)

Prof. Dr. Ernane José Xavier Costa



Lógica Nebulosa

Introdução

- Lógica Difusa ou Lógica Fuzzy
 - **Extensão da lógica booleana**
 - Um valor lógico difuso é um valor qualquer no intervalo de valores entre 0 e 1
- As implementações da lógica difusa permitem que estados não precisos possam ser tratados por dispositivos de controle.
 - Desse modo, é **possível avaliar conceitos não-quantificáveis**.
 - Casos práticos:
 - Avaliar a temperatura (*quente, morno, frio, etc.*)
 - Sentimento de felicidade (*radiante, feliz, apático, triste.*)



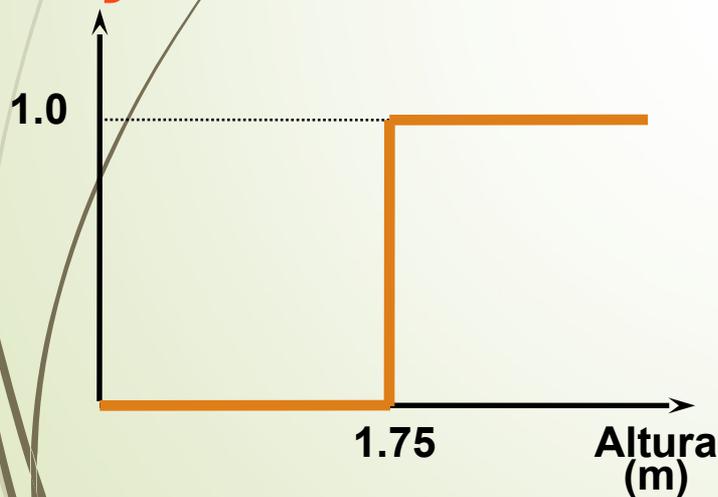
Introdução

- ▮ Surgiu com *Lofti A. Zadeh*, Berkeley (1965).
 - ▮ para tratar do aspecto vago da informação;
 - ▮ 1978 – desenvolveu a Teoria das Possibilidades
 - ▮ menos restrita que a noção de probabilidade
 - ▮ ligar a lingüística e a inteligência humana, pois muitos conceitos são melhores definidos por palavras do que pela matemática.
- ▮ É uma técnica baseada em graus de pertinencia (verdade).
 - ▮ os valores 0 e 1 ficam nas extremidades
 - ▮ inclui os vários estados de verdade entre 0 e 1
 - ▮ idéia: todas as inf. admitem graus (temperatura, altura, velocidade, distância, etc...)

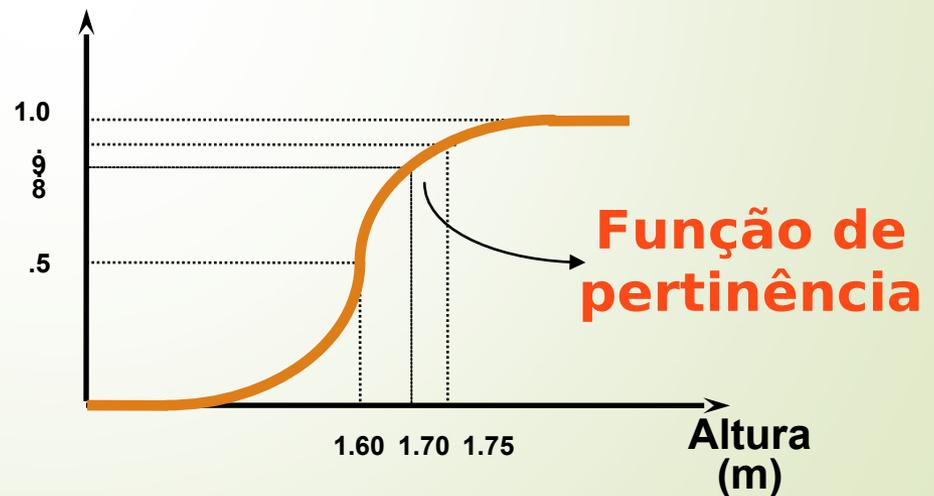
Conjuntos Fuzzy

- Na teoria dos conjuntos nebulosos existe um grau de pertinência de cada elemento a um determinado conjunto.
- Conjuntos com limites imprecisos.

Conjunto Clássico



Conjunto Fuzzy



A = Conjunto de pessoas altas

Conjuntos Fuzzy

- Um conjunto fuzzy A definido no universo de discurso X é caracterizado por uma **função de pertinência** μ_A , a qual mapeia os elementos de X para o intervalo $[0,1]$.

$$\mu_A: X \rightarrow [0,1]$$

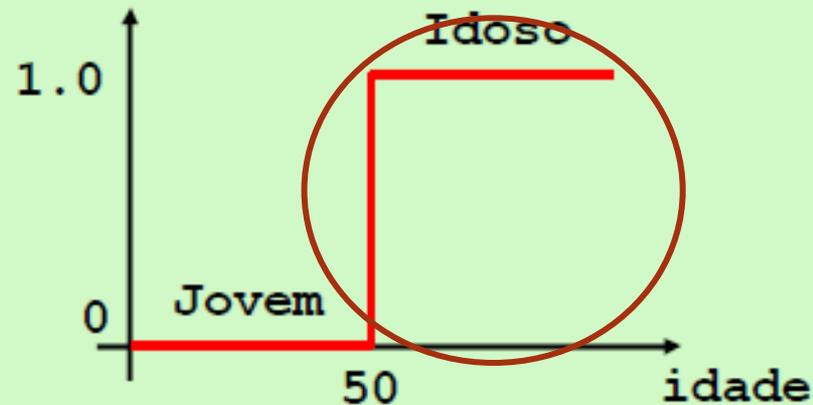
- Desta forma, a função de pertinência associa a cada elemento x pertencente a X um número real $\mu_A(x)$ no intervalo $[0,1]$, que representa o **grau de pertinência** do elemento x ao conjunto A , isto é, o quanto é possível para o elemento x pertencer ao conjunto A .

- 
- A função de pertinência $\mu_{A(x)}$ indica o grau de compatibilidade entre x e o conceito expresso por A :
 - $\mu_A(x) = 1$ indica que x é completamente compatível com A ;
 - $\mu_A(x) = 0$ indica que x é completamente incompatível com A ;
 - $0 < \mu_A(x) < 1$ indica que x é parcialmente compatível com A , com grau $\mu_A(x)$.

□ Crisp

- pode ser visto como um conjunto nebuloso específico (teoria de conjuntos clássica)
- $\mu_A \{0,1\}$ pertinência do tipo “tudo ou nada”, “sim ou não” e não gradual como para os conjuntos nebulosos

● Recordando a Lógica Booleana



```
If idade  $\geq$  50  
    É Idoso  
Else  
    É Jovem
```

**Altamente
Determinístico**



A pessoa só pode ser Jovem OU Idosa

Pessoa com **90** anos é **Idosa**

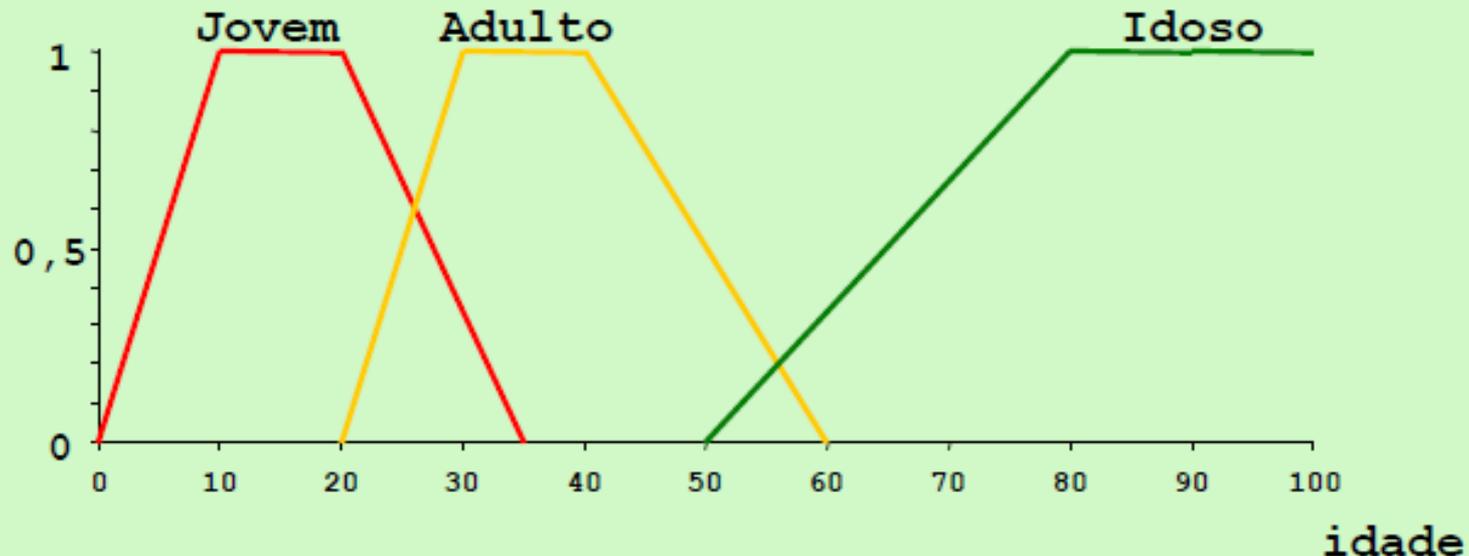
Pessoa com **2** anos é **Jovem**

Pessoa com **51** anos é **Idosa** ???

Pessoa com **49** anos é **Jovem** ???

Função característica do conjunto "crisp"

Lógica Nebulosa



Pessoa com **90** anos é $\{0,0; 0,0; 1,0\}$

Pessoa com **2** anos é $\{0,2; 0,0; 0,0\}$

A pessoa **É** Jovem,
Adulta e Idosa

Pessoa com **51** anos é $\{0,0; 0,45; 0,03\}$

Pessoa com **49** anos é $\{0,0; 0,55; 0,0\}$

Conjuntos Fuzzy

- Definição formal
 - Um conjunto fuzzy A em X é expresso como um conjunto de pares ordenados:

$$A = \left\{ \left(x, \underbrace{\mu_A(x)}_{\text{Função de pertinência}} \right) \mid x \in X \right\}$$

Conjunto fuzzy

Universo ou Universo de discurso

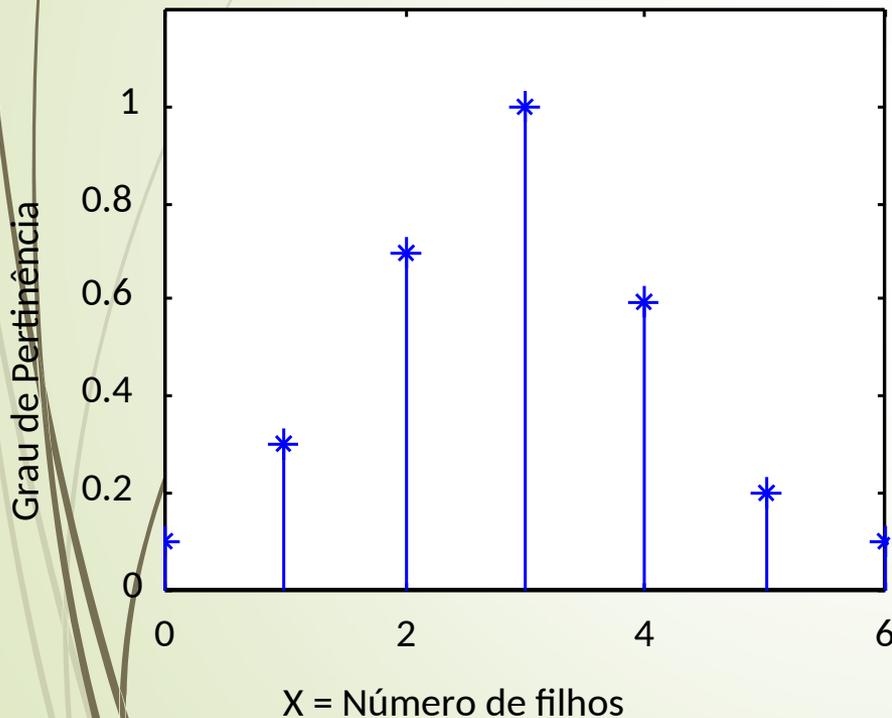
Um conjunto fuzzy é totalmente caracterizado por sua função de pertinência.

Lógica Fuzzy Fundamentos

- ▣ Representações
 - ▣ Funções de pertinência representadas em computador podem ser:
 - ▣ **contínuas** ou **discretas**.
 - ▣ No caso contínuo, a função de pertinência é uma função matemática, possivelmente um programa.
 - ▣ No caso discreto, a função de pertinência e o universo são pontos de uma lista (vetor).

Universo Discreto

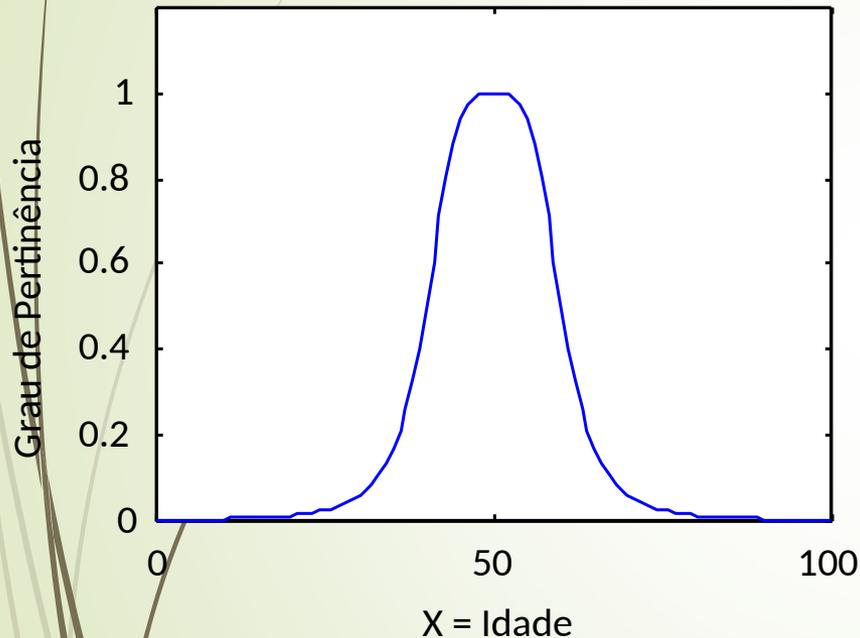
(a) Universo Discreto



- $X = \{\text{SF, Boston, LA}\}$ (discreto e não ordenado)
 - $C = \text{"Cidade desejável para se viver"}$
 - $C = \{(\text{SF}, 0.9), (\text{Boston}, 0.8), (\text{LA}, 0.6)\}$
- $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (discreto)
 - $A = \text{"Número de filhos razoável"}$
 - $A = \{(0, .1), (1, .3), (2, .7), (3, 1), (4, .6), (5, .2), (6, .1)\}$

Universo Contínuo

(b) Universo Contínuo



$$m_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10}\right)^2}$$

- $X = (\text{Conjunto de números reais positivos})$ (contínuo)
- $B = \text{“Pessoas com idade em torno de 50 anos”}$
- $B = \{(x, \mu_{B(x)}) \mid x \text{ em } X\}$

Operações sobre conjuntos fuzzy

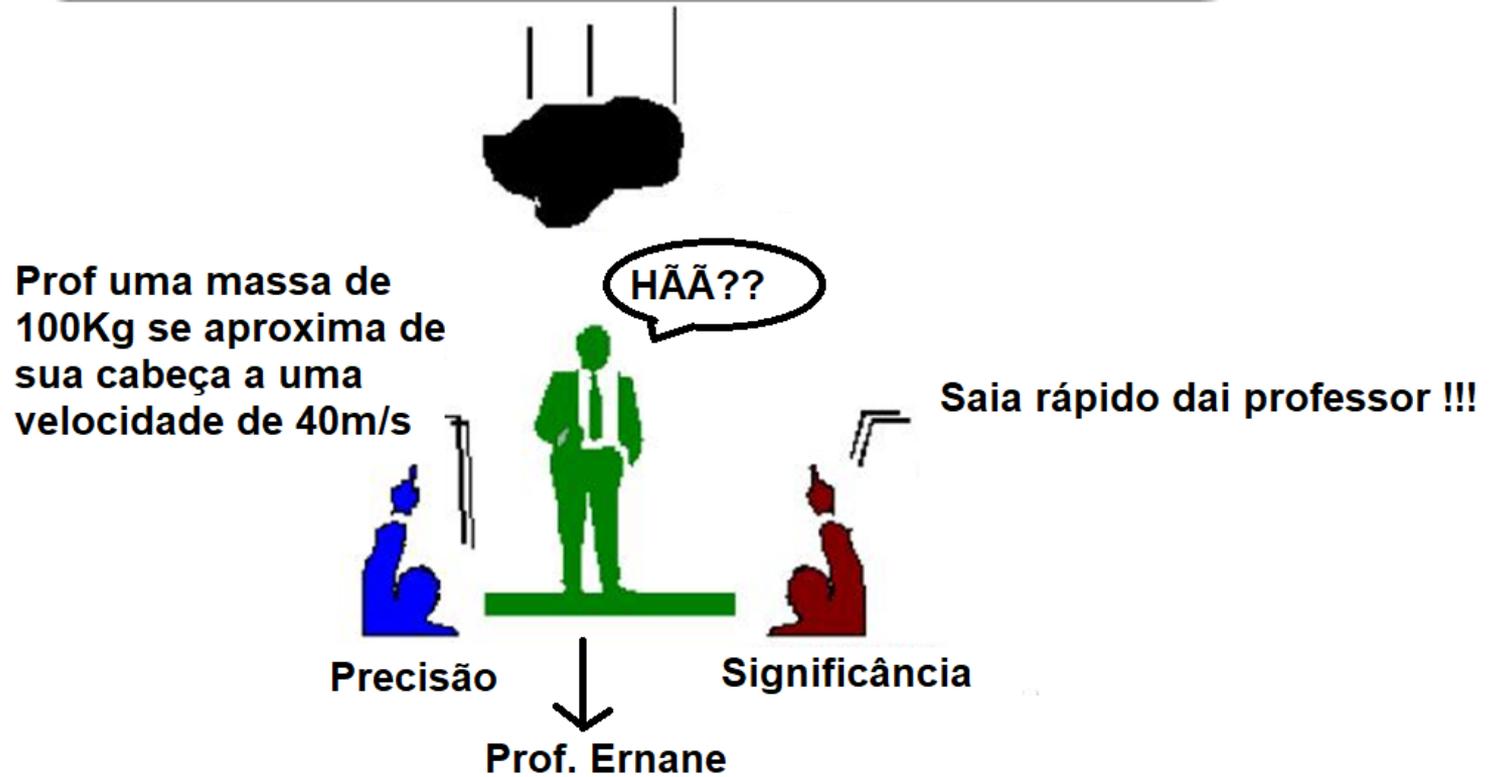
- ▢ Uma sentença modificada pela palavra “não” é dita “negação” da sentença original.
 - ▢ NÃO-fuzzy(x) = $1 - x$
- ▢ A palavra “e” é usada para juntar duas sentenças formando uma “conjunção” de duas sentenças.
 - ▢ E-fuzzy(x,y) = Mínimo(x,y)
- ▢ De maneira similar a sentença formada ao conectarmos duas sentenças com a palavra “ou” é dita “disjunção” das duas sentenças.
 - ▢ OU-fuzzy(x,y) = Máximo(x,y)

Operadores Fuzzy

- ▮ Suponha que desejássemos representar de forma fuzzy a altura de Alice (1,65 m), Bob (1,75 m), Carlos(2,0m) e Denise(1,45 m). Nossas proposições serão da forma "X é alto", e serão:
 - ▮ A = Alice é alta, $\mu(A)=0,55$
 - ▮ B = Bob é alto, $\mu(B)=0,75$
 - ▮ C = Carlos é alto, $\mu(C) = 1,0$
 - ▮ D = Denise é alta, $\mu(D) = 0,0$
- ▮ Usando os operadores fuzzy, podemos escrever sentenças como:
 - ▮ Carlos não é alto, $N\tilde{A}O(C)$, $\mu(N\tilde{A}O(C))= 1,0 - \mu(C) = 0,0$
 - ▮ Bob não é alto, $N\tilde{A}O(B)$, $\mu(N\tilde{A}O(B))= 1,0 - \mu(B) = 0,25$
 - ▮ Denise é alta e Alice é Alta, D e A, $\mu(D \text{ e } A)= \text{mínimo} (\mu(D), \mu(A)) = 0,0$

Funcionamento lógica *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy* tem por essência gerar valores de saídas sem a necessidade de entradas precisas.





Sistemas de Inferencia Fuzzy

- ▢ Dois modelos de inferência fuzzy importantes são:
- ▢ Modelo de Mamdani.
 - ▢ Dados os conjuntos fuzzy A, B e C, uma regra típica do modelo é do tipo:
 - ▢ Se x é A e y é B então z é C.
- ▢ Modelo de Takagi-Sugeno
 - ▢ Dados os conjuntos fuzzy A e B e uma função real F uma regra típica é:
 - ▢ Se x é A e y é B então $z = F(x,y)$



Sistemas de Inferencia Fuzzy

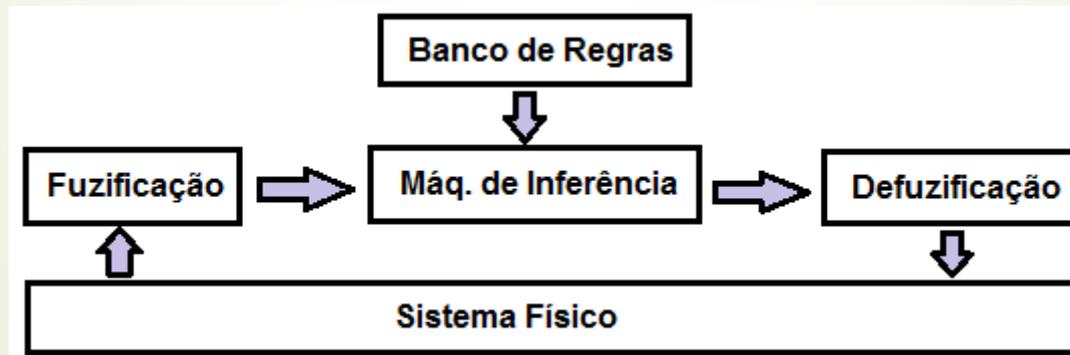
□ D

Mamdani ou Sugeno?

- Método de Mamdani é amplamente aceito para a captura de conhecimento especializado. Ele nos permite descrever a experiência de forma mais intuitiva, mais semelhante à humana. No entanto, o tipo de inferência Mamdani implica numa carga computacional considerável.
- Por outro lado, o método de Sugeno é computacionalmente eficiente e funciona bem com otimização e técnicas adaptativas, o que torna muito atraente em problemas de controle, especialmente para sistemas dinâmicos não-lineares.

Sistemas Fuzzy

- Sistema de controle fuzzy baseado no modelo de Mamdani.





Componentes do sistema

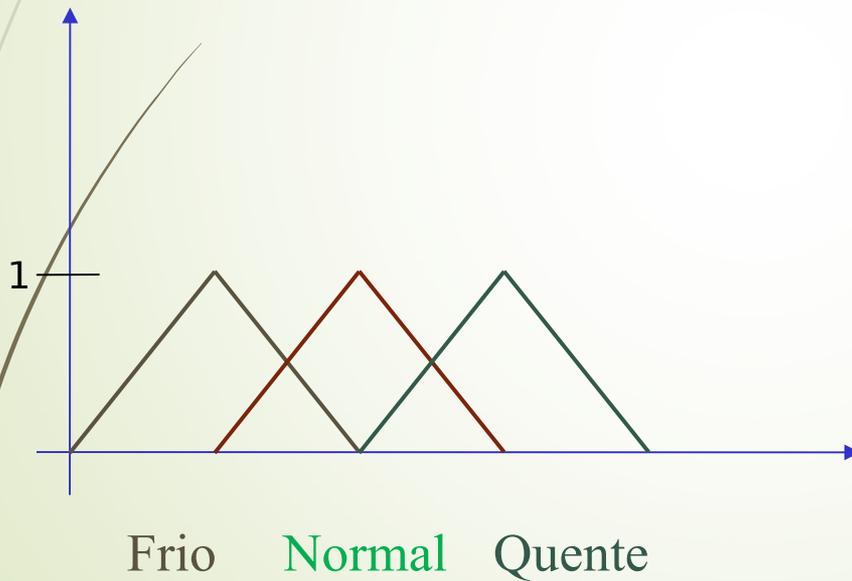
- ▮ Definição das variáveis fuzzy de entrada e de saída: forma e valores das variáveis
 - ▮ Regras fuzzy
 - ▮ Técnica de defuzzificação
- 

Definição as variáveis

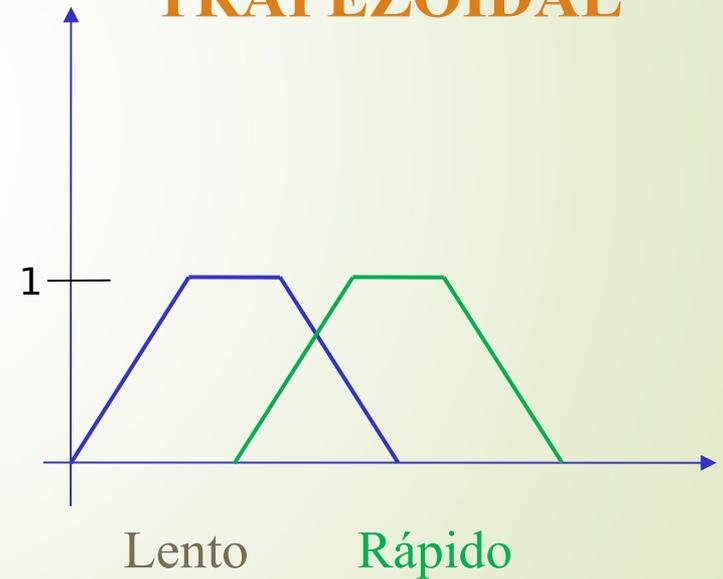
- ▮ Etapa na qual as variáveis lingüísticas são definidas de forma subjetiva, bem como as funções membro (funções de pertinência)
- ▮ Engloba
 - ▮ Análise do Problema
 - ▮ Definição das Variáveis
 - ▮ Definição das Funções de pertinência
 - ▮ Criação das Regiões
- ▮ Na definição das funções de pertinência para cada variável, diversos tipos de espaço podem ser gerados:
 - ▮ Triangular, Trapezoidal, Gaussiana, ...

Exemplos de variáveis fuzzy

TRIANGULAR



TRAPEZOIDAL





Regras Fuzzy

SE condição ENTÃO conclusão, com variáveis linguísticas (fuzzy)

Exemplo:

Se a fruta é verde então o gosto é azedo

Se a fruta é amarela então o gosto é pouco-doce

Se a fruta é vermelha então o gosto é doce

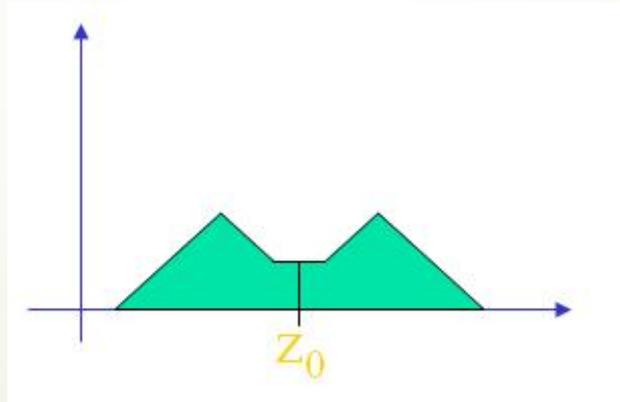


Defuzzificação

- ▮ Etapa no qual as regiões resultantes são convertidas em valores para a variável de saída do sistema
- ▮ Esta etapa corresponde a ligação funcional entre as regiões *Fuzzy* e o valor esperado.
 - ▮ converte as variáveis fuzzy em valores numéricos ou aceitáveis pelo sistema.

Técnica de Defuzzificação

- Dentre os diversos tipos de técnicas de defuzzificação, pode-se citar:
 - Centróide
 - O valor de saída é o centro da gravidade da função de distribuição da possibilidade da ação de controle.





- ☐ Método do Primeiro dos Máximos

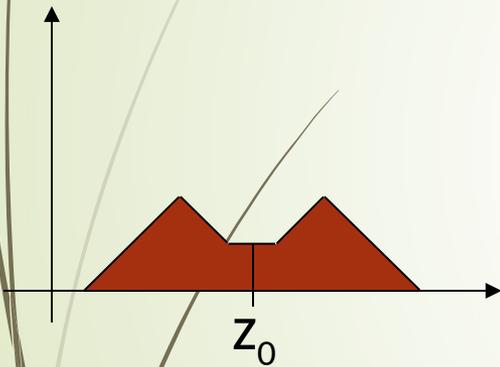
- ☐ Encontra o primeiro ponto entre os valores que tem o maior grau de pertinência inferido pelas regras.

- ☐ Método da Média dos Máximos

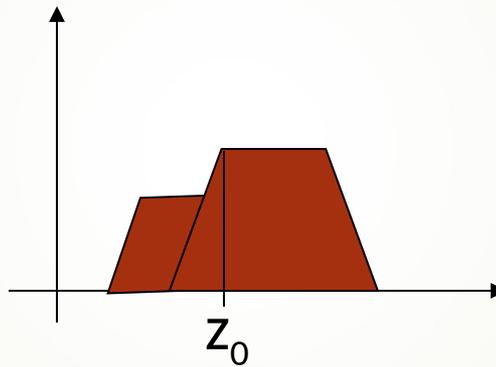
- ☐ Encontra o ponto médio entre os valores que tem o maior grau de pertinência inferido pelas regras.

Técnicas de Defuzzificação

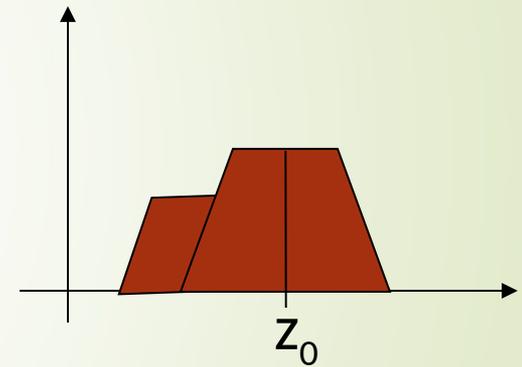
Exemplos:



Centróide

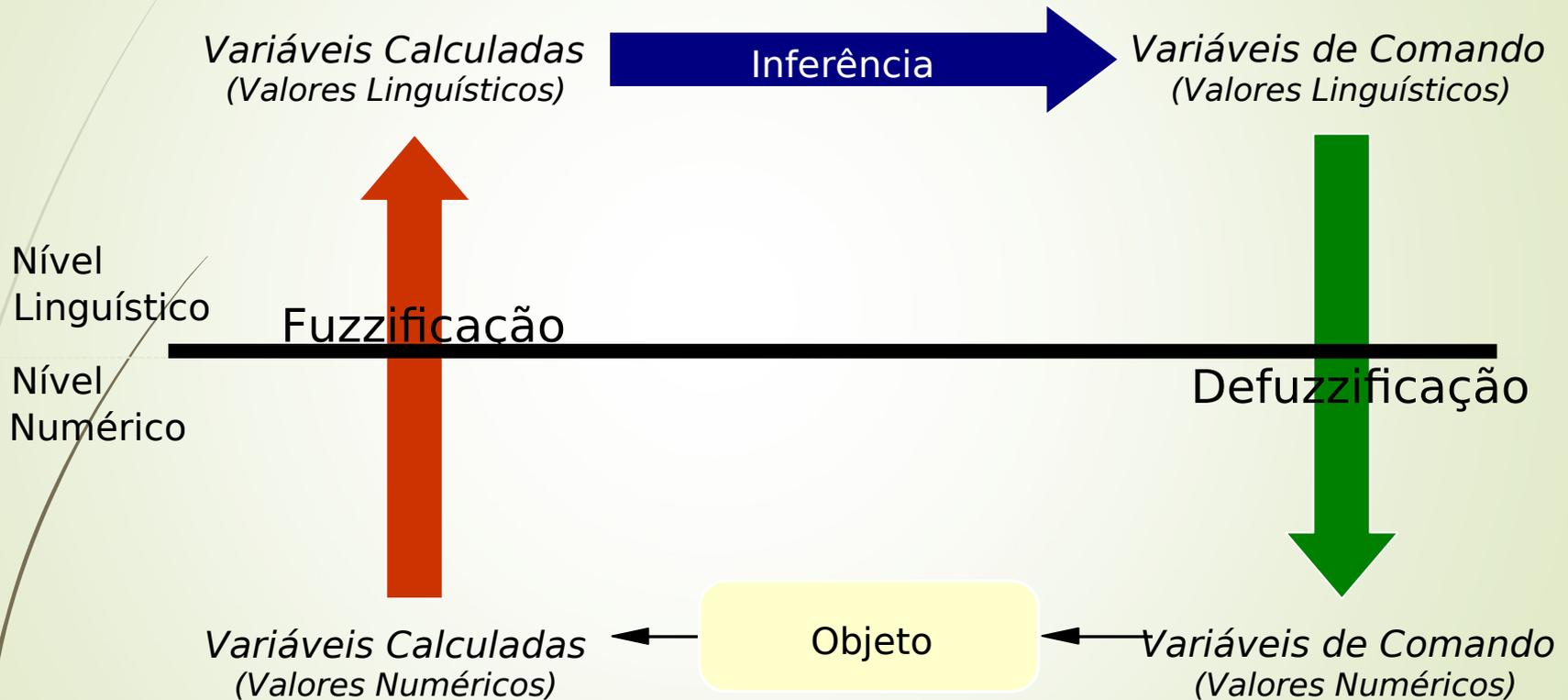


Primeiro dos
máximos



Média dos
Máximos

Etapas do Raciocínio



Fuzzificação

- Etapa na qual os valores numéricos são transformados em graus de pertinência para um valor lingüístico.
- Cada valor de entrada terá um grau de pertinência em cada um dos conjuntos difusos. O tipo e a quantidade de funções de pertinência usados em um sistema dependem de alguns fatores tais como: precisão, estabilidade, facilidade de implementação...



INFERÊNCIA: Avaliação das regras

- ▮ Cada antecedente (lado if) tem um grau de pertinência. A ação da regra (lado then) representa a saída nebulosa da regra. Durante a avaliação das regras, a intensidade da saída é calculada com base nos valores dos antecedentes e então indicadas pelas saídas nebulosas da regra.



INFERÊNCIA: Agregação das Regras

- São as técnicas utilizadas na obtenção de um conjunto difuso de saída “x” a partir da inferência nas regras.
- Determinam quanto a condição de cada regra será satisfeita.
- Para cada variável fuzzy de saída, considera o resultado de todas as regras. Por exemplo, considerando a pertinência máxima das regras para cada valor da variável.



Defuzzificação

- Processo utilizado para converter o conjunto difuso de saída em um valor crisp correspondente.
- Alguns métodos de defuzzificação:
 - Centróide,
 - Média dos máximos,
 - Primeiro dos máximos,
 - Último dos máximos,
 - etc.

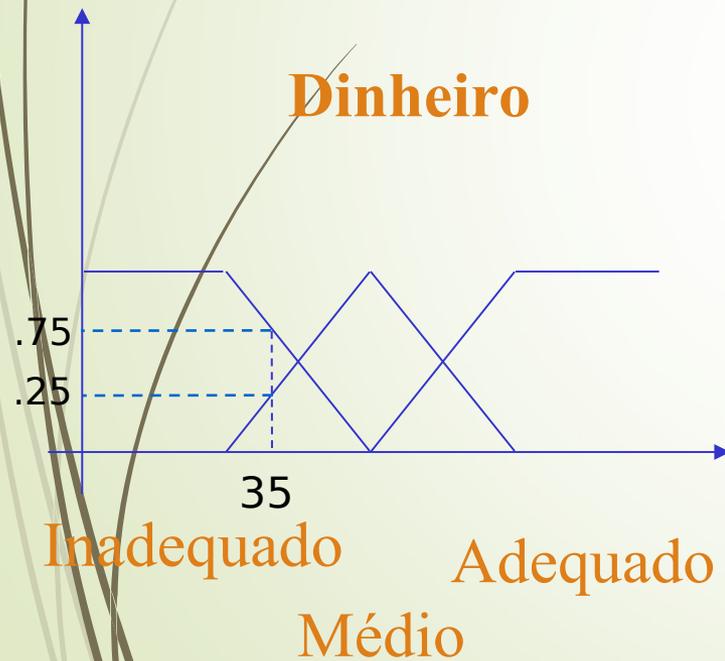
Um exemplo

- ▮ Objetivo do sistema:
 - ▮ um analista de projetos de uma empresa que determina o risco de um determinado projeto
- ▮ Variáveis de entrada:
 - ▮ quantidade de dinheiro e de pessoas envolvidas no projeto
- ▮ Base de conhecimento
 1. Se dinheiro é adequado **ou** pessoal é baixo então risco é pequeno
 2. Se dinheiro é médio **e** pessoal é alto, então risco é normal
 3. Se dinheiro é inadequado, então risco é alto

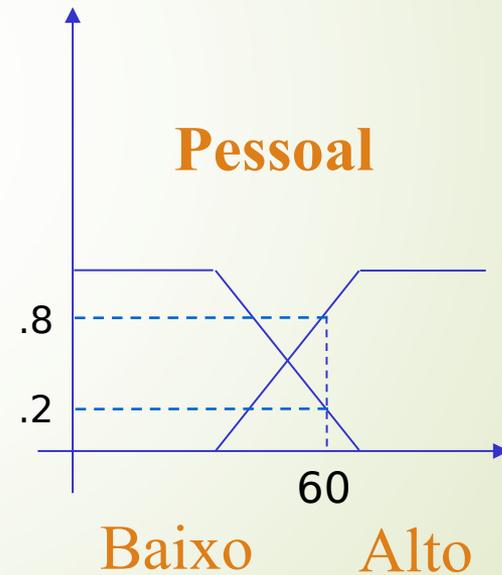
Problema a ser resolvido: dinheiro = 35% e pessoal = 60%

Inferência Fuzzy: Um exemplo

□ Passo 1: Fuzzificar



$$\mu_i(d) = 0,75 \ \& \ \mu_m(d) = 0,25$$



$$\mu_b(p) = 0,2 \ \wedge \ \mu_a(p) = 0,8$$

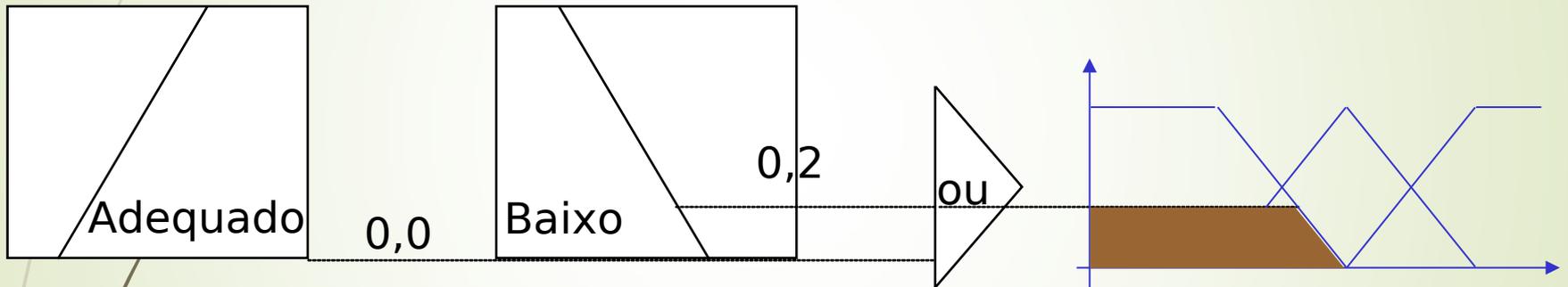
Inferência Fuzzy: Um exemplo

Passo 2: Avaliação das regras

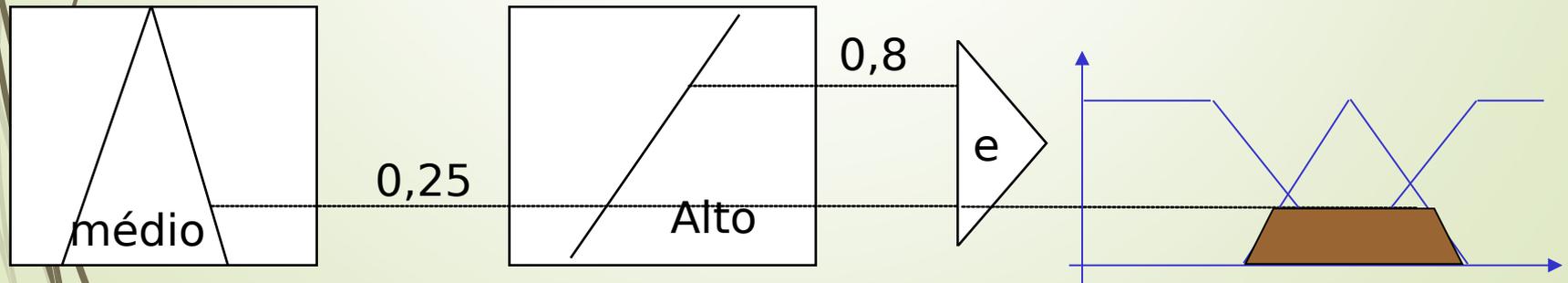
Regra 1:

OU → máximo E → mínimo

Risco

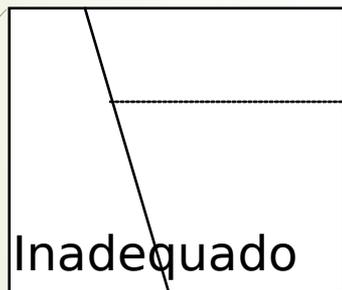


Regra 2:



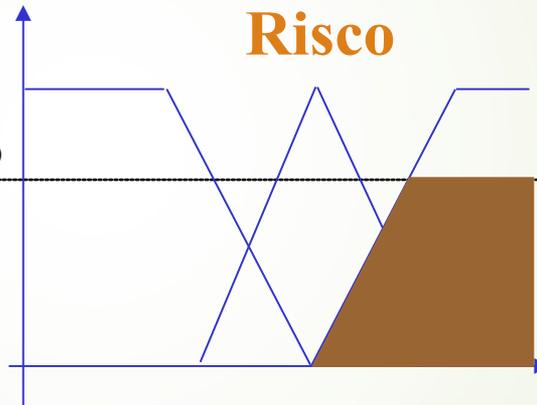
Inferência Fuzzy

Regra 3:



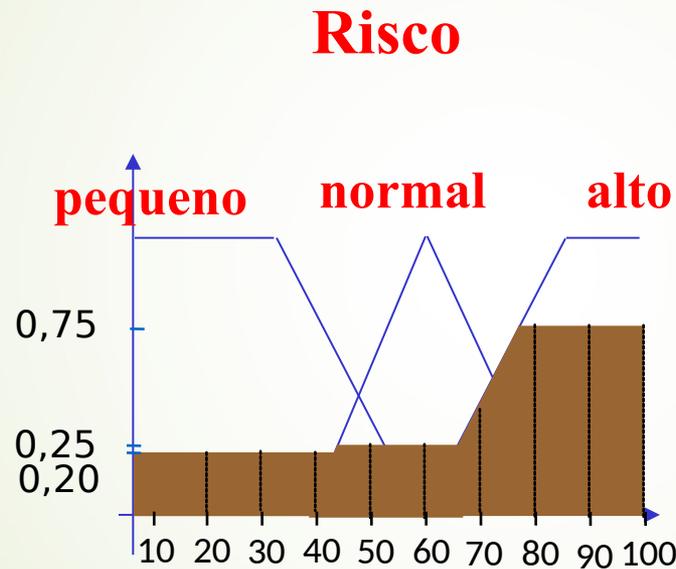
0,75

Risco



Inferência Fuzzy

Passo 3: Defuzzificação



$$C = \frac{(10+20+30+40) \cdot 0,2 + (50+60+70) \cdot 0,25 + (80+90+100) \cdot 0,75}{0,2+0,2+0,2+0,2+0,25+0,25+0,25+0,75+0,75+0,75} = \frac{267,5}{3,8} = 70,4$$



Outro exemplo

- ▮ O sistema tem como objetivo determinar a gorjeta que um cliente deve dar.
- ▮ Esse sistema possui três variáveis (serviço, comida e gorjeta).

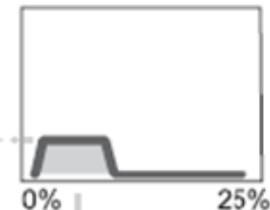
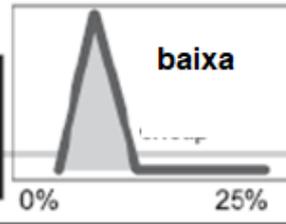
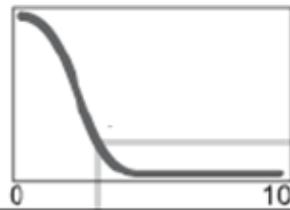
As variáveis comida e serviço são variáveis de entrada e gorjeta é a variável de saída.

1 - Entrada fuzzy

2 Operação fuzzy aplicada (ou = Max)

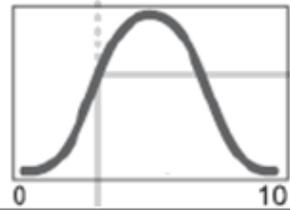
3 Implicações

1.

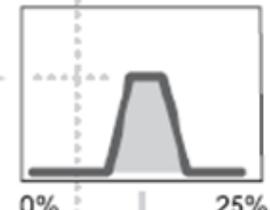
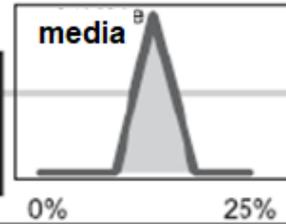


Se **serviço ruim** ou **comida mais ou menos** -> **gorjeta pouca**

2.

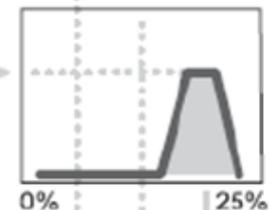
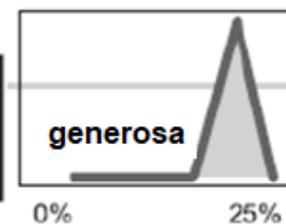
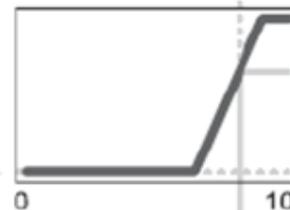


regra 2 não depende da comida



If **serviço bom** então **gorjeta média**

3.



Se **serviço excelente** ou **comida deliciosa** então **gorjeta = generosa**

serviço = 3

comida = 8

entrada 1

entrada 2

gorjeta

16.7%

centroide

aplicar agregação



Ex. Aplicações

- ▣ Copiadora Canon ajusta a voltagem do tambor baseado na densidade da imagem, temperatura e umidade.
- ▣ Secadora de roupa Matsushita ajusta a estratégia do tempo de secagem baseado no tamanho da carga e tipo de tecido
- ▣ Lavadoras de roupa (Daewoo, Goldstar, Hitachi, Matsushita, Samsung, Sony, Sharp, etc.) ajustam a estratégia de lavagem, baseado no nível sujeira, tipo de tecido, na quantidade de roupa, e nível d'água.
- ▣ Etc.

Exemplo de Aplicação

Controle de velocidade de um veiculo

3 entradas:

velocidade (5 níveis)

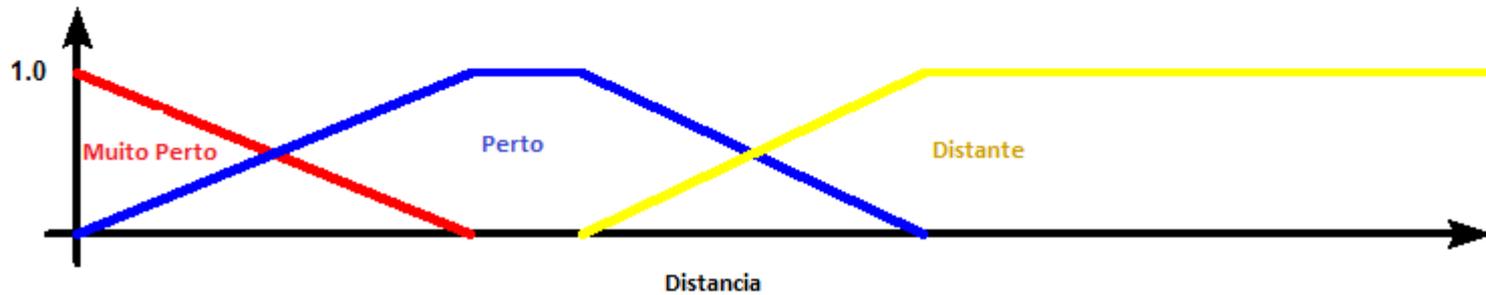
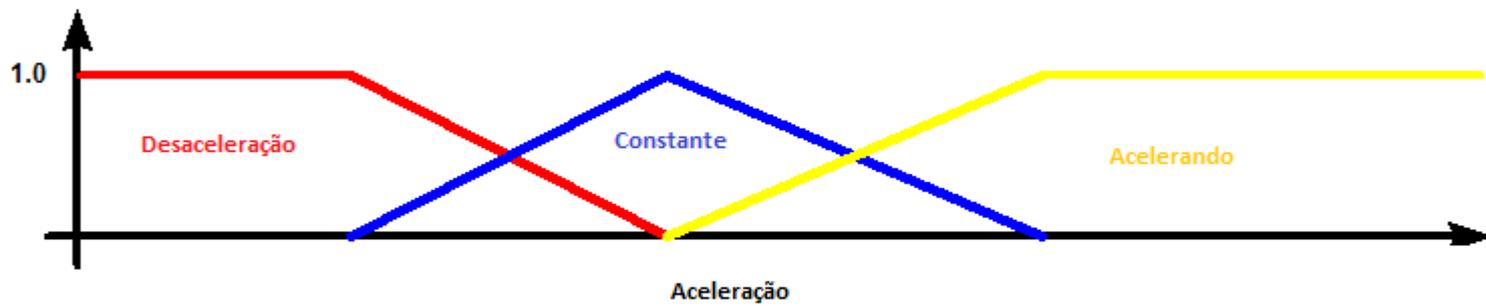
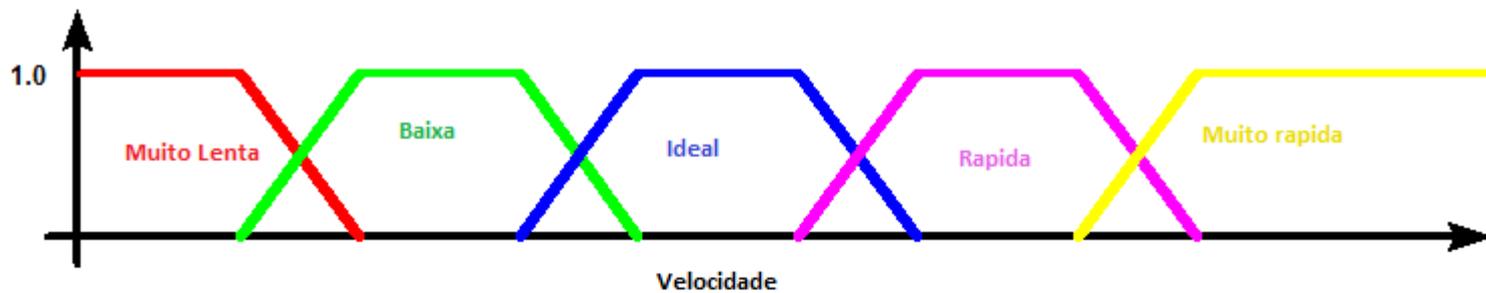
aceleração (3 níveis)

Distancia ao destino(3 niveis)

1 saida:

potencia (fluxo de combustivel para o motor)

Conjunto de regras para obter a saida em função das entradas





Exemplo de Regras

Se velocidade é MUITO LENTA e aceleração está DESACELERANDO então aumente muito a potencia

Se a velocidade é LENTA e a aceleração esta DECRESCENDO então aumente um pouco a potencia

Se a distancia esta PERTO então aumente pouco a potência



Bibliografia

- Terano, T., Asai, K., Sugeno, M. - Fuzzy Systems Theory and its Applications - Editora Academic Press, 1992 (ISBN: 0126852456)
- Driankov, Dimiter - An introduction to fuzzy control - Editora Springer-Verlag , 1996 (ISBN: 3540606912)
- MAMDANI, E. H. Aplications of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. Proc. IEEE 121, vol. 12, p. 1585-1588, 1973.
- SUGENO, M.. An introductory survey of fuzzy control. *Information Sciences* 36, p. 59-83, 1985.