**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

**MPM5601 - ELEMENTOS DE LÓGICA E APLICAÇÕES**

LUIZ HENRIQUE LINS DE ARRUDA GONÇALVES
VICTÓRIA FIGUEIREDO KOBAYASHI

# O PROGRAMA DE HILBERT (1862-1943) E SEU ARTIGO "SOBRE O INFINITO"

São Paulo
2023

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**MPM5601 - ELEMENTOS DE LÓGICA E APLICAÇÕES**

LUIZ HENRIQUE LINS DE ARRUDA GONÇALVES
VICTÓRIA FIGUEIREDO KOBAYASHI

# O PROGRAMA DE HILBERT (1862-1943) E SEU ARTIGO "SOBRE O INFINITO"

Proposta de trabalho sobre O Programa de Hilbert (1862-1943) e seu artigo "Sobre o infinito", apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (USP), como requisito para avaliação na disciplina Elementos de Lógica e Aplicações do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

**Docente responsável: Professora Dra. Iole de Freitas Druck**

São Paulo
2023

# SUMÁRIO

**1 INTRODUÇÃO……...…….……...……....…..…….....3**

**2 OS TIPOS DE INFINITO…….….4**

**3 BIOGRAFIA DE HILBERT……..…….……...…...5**

**4 INFINITO E AS ÁREAS MATEMÁTICAS.……..……..……...…...8**

4.1 WEIERSTRASS, FREGE E DEDEKIND…….,……...……..8

4.2 OS NÚMEROS TRANSFINITOS DE CANTOR.……..……...…11

**5 O INFINITO E A LÓGICA: O PROGRAMA DE HILBERT..……..…...…..16**

**6 CONCLUSÃO……..…….…20**

**REFERÊNCIAS…….……..……....…….21**

# 1 INTRODUÇÃO

No início do século XX, testemunhou-se um intenso movimento no campo das fundamentações da matemática, a gama de resultados acerca da presença e aplicação do infinito, bem como a “confusão” causada pelo paradoxo de Russell, tanto na análise matemática como em outras esferas do conhecimento, instigou matemáticos deste período a questionarem a validade do emprego de conjuntos infinitos na matemática. Os contrastes entre o infinito potencial e o atual, juntamente aos resultados teóricos relacionados à análise e à geometria, levaram a uma situação que alguns historiadores denominam como "a crise nos fundamentos da matemática".

Em 1925, durante o Congresso da Sociedade Matemática da Westfália, David Hilbert (1862-1943) palestrou acerca de seu trabalho "Sobre o Infinito" e é ali que surgem as bases para o que hoje conhecemos como o "Programa de Hilbert". Em tal palestra, David buscava esclarecer a natureza do infinito, assim fugindo dos paradoxos que surgiam de seu uso. Sua proposta era desenvolver uma teoria capaz de substituir os métodos de dedução que se utilizavam do infinito por procedimentos finitos que fossem capazes de produzir os mesmos resultados matemáticos.

Com este trabalho, buscamos tratar da natureza dos infinitos, apresentar um pouco acerca de Hilbert e outros matemáticos que olhavam com entusiasmo para a questão do infinito, expor alguns de seus resultados, além de discorrer sobre o programa de Hilbert em si.

> O infinito, como nenhuma outra questão, abala tão profundamente as emoções humanas; o infinito, como nenhuma outra ideia, tão frutiferamente tem estimulado a mente; o infinito, como nenhum outro conceito, necessita ser esclarecido. (Hilbert, D., 1983)

## 2 OS TIPOS DE INFINITO

Para se discutir o infinito, faz-se necessário primeiro conceitualizar as suas caracterizações, sendo elas o infinito potencial, o infinito atual e o infinito absoluto.

- Infinito Potencial: talvez seja a concepção do infinito mais "natural", diz respeito a algo que pode ser aumentado, continuado ou estendido, tanto quanto se queira, indefinidamente. Como exemplo, tem-se a sequência dos números naturais (1, 2, 3, 4, 5, …), onde sempre é possível adicionar mais um, de forma indefinida.
- Infinito Absoluto: havia uma visão de que o infinito não poderia ser tratado de forma racional. Tomando base principalmente nos pensamentos da filosofia cristã; esta definição, do infinito como entidade, claramente não é tão interessante no desenvolvimento deste texto.
- Infinito Atual: há uma problematização do que era visto como infinito absoluto e foi lançada luz a uma discussão mais filosófica acerca do que é o infinito. Pode-se discutir a existência por completo de uma entidade com um número infinito de elementos? O primeiro matemático a lançar luz sobre os fundamentos da noção de infinito atual foi Bernard Bolzano (1781-1848), em sua obra "Paradoxos do infinito" (1851). Aqui surgem as bases para o que tratamos como cardinalidade na matemática atualmente. Entretanto, é apenas Georg Cantor (1845-1918) que traz uma definição mais aceita para este tipo de infinito:

> (...) a primeira sendo uma quantidade finita variável e aproximando-se à medida que se fazem aproximações, todas elas finitas, enquanto que o segundo é uma quantidade fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas. Trata-se do infinito enquanto totalidade.

## 3 BIOGRAFIA DE HILBERT

Figura: David Hilbert, em 1886.

David Hilbert, nascido em 23 de janeiro de 1862, em Königsberg, Prússia, e falecido em 14 de fevereiro de 1943, em Göttingen, Alemanha, foi um matemático que contribuiu significativamente para o desenvolvimento e estabelecimento dos fundamentos formalistas da matemática. Suas contribuições são tão importantes que não se limitam apenas a áreas da matemática como geometria, mas também se estendem para a física.

A parte inicial de sua carreira se deu durante seu trabalho na Universidade de Königsberg, mas sua podemos dizer que seu auge se deu durante os trabalhos na Universidade de Göttingen, cuja proeminência vinha de uma gama de contribuição de ilustres matemáticos como Carl Friedrich Gauss, Peter Gustav Lejeune Dirichlet e Bernhard Riemann no século XIX. Seguramente podemos dizer que a presença de Hilbert garantiu que a Universidade

tivesse um prestígio ainda maior durante o século XX, pessoas de todo mundo visitaram o Instituto de Matemática de Göttingen.

Agora sobre alguns de seus trabalhos: os estudos de Hilbert impactaram diretamente na teoria dos invariantes, ele demonstrou no teorema dos invariantes que todos os invariantes podem ser expressos em termos de um número finito. Já em 1899, publicou o seu trabalho "Os Fundamentos da Geometria" (1902), nele expunha um conjunto definitivo de axiomas para a geometria euclidiana. Este livro marcou um impacto significativo, estabelecendo novas formas no tratamento axiomático da geometria.

Já em 1900 apresentou ao mundo uma lista 23 problemas de pesquisa no Congresso Internacional de Matemática, em Paris, muitos dos problemas estão resolvidos, ainda assim temos alguns problemas sem solução que dependem de uma demonstração para a hipótese de Riemann.

Em 1908 temos o desenvolvimento da pesquisa que estamos mais interessados em tratar durante este trabalho. Hilbert tentara estabelecer uma base para a matemática, a partir da aritmética, ao provar que passos finitos de raciocínio lógico não poderiam levar a uma contradição, ou seja, a matemática poderia ser reduzida a uma quantidade finita de axiomas, ditos por ele consistentes; a partir disso poderíamos provar qualquer proposição matemática ali, sendo esse um sistema completo. No entanto, em 1931, o matemático austríaco-americano Kurt Gödel mostrou que esse objetivo era inatingível: proposições podem ser formuladas como indecidíveis; de tal forma que não é possível saber com certeza que os axiomas matemáticos não levam a contradições.

David Hilbert foi casado com Käthe Hilber e teve um filho, Franz Hilbert. Entre seus estudantes constam Hermann Weyl e o campeão de xadrez Emanuel Lasker. John von Neumann era seu assistente. Na universidade de Göttingen, compunha um grupo com alguns dos mais importantes matemáticos do século XX, como Emmy Noether. Entre seus 69 estudantes de pós-doutorado estavam muitos dos quais iriam se tornar futuramente matemáticos famosos, como Richard Courant e Hugo Steinhaus. A última década de sua vida fora marcada pela opressão do regime nazista, o funeral de Hilbert foi assistido por menos de uma dúzia de pessoas e notícia de sua morte só se tornou conhecida no mundo mais amplo seis meses depois que ele tinha morrido; em sua lápide constava o seguinte epitáfio: *"Wir müssen wissen. Wir werden wissen."* (Em português: "Devemos saber. Saberemos."). Tais palavras eram uma resposta à máxima latina: *"Ignoramus et ignorabimus"* ou "Não sei, não saberemos".

Figura: **O Clube do matemáticos de Giittingen, 1902**. Da esquerda para direita, primeira fileira: Abraham, Schilling, Hilbert, Klein, Schwarzschild, Mrs. Young, Diestel, Zermelo; segunda fileira: Fanla, Hansen, C. Miiller, Dawney, E. Schmidt, Yoshiye, Epstein, Fleisher, F. Bernstein; terceira fileira: Blumenthal, Hamel, H. Miiller.

## 4 INFINITO E AS ÁREAS MATEMÁTICAS

### 4.1 WEIERSTRASS, FREGE E DEDEKIND

Figura: Karl Weierstrass.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nasceu no dia 31 de outubro de 1815 em Ostenfeld, Alemanha e faleceu em 19 de fevereiro de 1897, em Berlim. Weierstrass fez contribuições significativas em diversos ramos da matemática, mas suas principais realizações estão na análise matemática.

A partir de suas críticas, Weierstrass conseguiu desenvolver as bases para a análise matemática. Trouxe transparência para conceitos importantíssimos como mínimo, função e quociente diferencial, também resolveu questões que persistiam no cálculo infinitesimal, pôde elucidar as noções vagas a respeito do infinitesimal, bem como transformou o conceito de "infinitamente pequeno e infinitamente grande" em proposições correspondentes a relações entre magnitudes finitas. De fato, o trabalho de Karl foi de grande avanço para o desenvolvimento da análise matemática, o tornando um dos matemáticos mais ilustres do século XIV.

Entretanto, mesmo com a fundamentação que Weierstrass obteve para o cálculo infinitesimal, os estudos a despeito dos fundamentos da análise estavam longe de estarem completos. O infinito ainda era uma grande incógnita e seu significado não era totalmente claro; dando as caras nas séries numéricas infinitas e na construção dos números reais,

mesmo que de forma implícita. Em sua fundamentação da análise, Weierstrass utilizou-se de deduções lógicas envolvendo o infinito, por exemplo, quando trata do conceito de **para todo** nos números reais para uma determinada propriedade. Daí podemos ver como a problemática envolvendo o infinito precisa ser resolvida.

> (...) Os métodos dedutivos baseados no infinito devem ser substituídos por procedimentos finitos que produzam exatamente os mesmos resultados, isto é, que tornem possível as mesmas cadeias de provas e os mesmos métodos de obtenção de fórmulas e teoremas. Esta é a intenção da minha teoria. Ela tem por objetivo estabelecer de uma vez por todas a confiabilidade definitiva dos métodos matemáticos, o que o período crítico do cálculo infinitesimal ainda não conseguiu; essa teoria deveria portanto completar o que Weierstrass aspirou conseguir com sua fundamentação da análise e para a qual ele deu um passo essencial e necessário. (Hilbert, D., 1983)

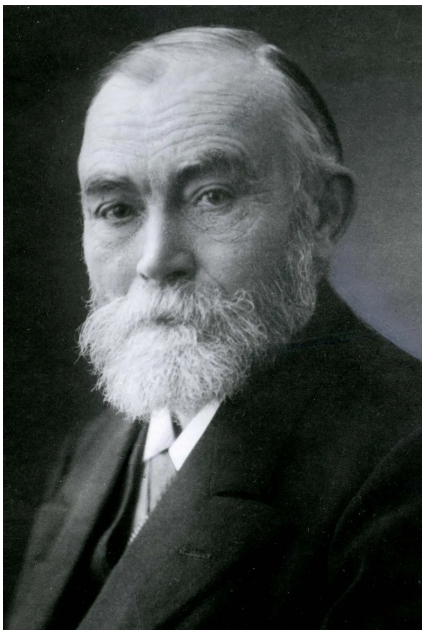

Figura: Gottlob Frege.

Friedrich Ludwig Gottlob Frege foi um filósofo e lógico alemão, nascido em 8 de novembro de 1848, em Wismar, na Alemanha, e falecido em 26 de julho de 1925, em Bad Kleinen. É conhecido como um grandes nomes da lógica matemática e da filosofia analítica.

Debruçando-se no conceito do infinito pela caracterização do infinito atual, seus estudos com teoria da linguagem foram responsáveis por inventar a lógica de predicados axiomática, através da invenção de variáveis quantificadas, que vemos hoje como

praticamente base da matemática no campo da lógica. Através do simbolismo, Frege queria mostrar todas as leis da aritmética de axiomas que ele afirmou como lógicas, o trabalho mais importante e inovador ficou conhecido como Lei Básica V, a qual consistia nos dois princípios a seguir:

i) Princípio da Excepcionalidade: $x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$;
ii) Princípio da Abstração: $\exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow Pz)$.

Seu trabalho na lógica tomou notoriedade a partir de 1903, quando Russell escreveu um apêndice de The Principles of Mathematics.

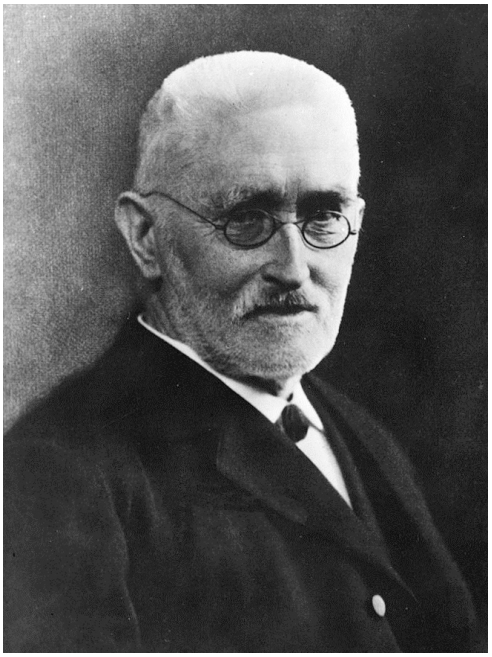

Figura: Richard Dedekind.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (Braunschweig, 6 de outubro de 1831 — Braunschweig, 12 de fevereiro de 1916) foi um matemático alemão. Dedekind fez contribuições importantes para a álgebra abstrata (principalmente na teoria dos anéis), na fundamentação axiomática dos números naturais, na teoria algébrica dos números e na definição de número real.

Assim como Frege e Cantor,utilizando-se da caracterização atual de infinito, Dedekind defendia que a noção de quantidade deveria ser substituída por uma rigorosa construção aritmética dos números reais, isto é, uma construção baseada na noção de números naturais

ou racionais, que mostrava ser menos problemática do que a noção de quantidade contínua. Sua abordagem, conhecida como cortes de Dedekind para a construção dos números reais, proporcionou uma maneira de lidar com conjuntos infinitos e ajudou a estabelecer uma base mais sólida para a análise matemática.

Dos seus estudos surge o conceito de conjunto Dedekind-Infinito: Um conjunto A é Dedekind-infinito se A é equipotente a um subconjunto próprio, ou seja, se possuem a mesma cardinalidade - se existe bijeção entre os conjuntos.

Devido aos estudos de Frege, Dedekind e Cantor a problemática do infinito ficou um pouco menos complexa e, posteriormente, pode-se ver -talvez- em Hilbert uma luz no fim do túnel. A seguir vamos expor acerca das contribuições de Cantor.

## 4.2 OS NÚMEROS TRANSFINITOS DE CANTOR

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) foi um matemático russo responsável pela elaboração da moderna teoria dos conjuntos. Tal teoria foi gerada para esclarecer questões sobre o infinito que não haviam sido compreendidas totalmente por meio dos estudos de Análise. O recorte da teoria dos conjuntos que interessa a este trabalho, portanto, é a teoria dos números transfinitos.

Como já mencionado, Frege e Dedekind usaram o conceito de infinito atual em seus respectivos trabalhos, mas foi Cantor quem desenvolveu sistematicamente tal conceito, até porque foi ele quem chegou à conclusão de que os infinitos não têm todos o mesmo "tamanho", isto é, eles não são equipotentes. O infinito dos números inteiros, por exemplo, tem cardinalidade menor do que o infinito dos números reais entre 3 e 4, já que os inteiros são enumeráveis, mas os reais são não enumeráveis.

Esta é a novidade na teoria de Cantor: os pontos de um intervalo de números reais, como os reais entre 3 e 4, não podem ser enumerados da maneira tradicional, isto é, a partir da contagem de números naturais. Como se adota o infinito atual, pode-se ir além com o estudo.

Ao contar os números 1, 2, 3, …, os objetos enumerados formam um conjunto infinito completado. Cantor chamou de $\omega$ a este tipo de ordem, o que permite que a contagem siga naturalmente fazendo-se $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, … , $\omega + \omega$ ou $\omega.2$ e daí $\omega.2 + 1$, … , $\omega.2 + \omega$, seguindo para $\omega.3$, $\omega.4$, … , $\omega.\omega$, até finalmente obter a seguinte tabela, retirada do artigo Sobre o Infinito (1983):

$1, 2, 3, \ldots$

$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots$

$\omega.2, \omega.2 + 1, \omega.2 + 2, \ldots$

$\omega.3, \omega.3 + 1, \omega.3 + 2, \ldots$

$\omega^2, \omega^2 + 1, \ldots$

$\omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega.2, \omega^2 + \omega.3, \ldots$

$\omega^2.2, \ldots$

$\omega^2.2 + \omega, \ldots$

$\omega^3, \ldots$

$\omega^4, \ldots$

$\omega^\omega, \omega^{\omega\omega}, \omega^{\omega\omega\omega}, \ldots$

> Estes são os primeiros números transfinitos de Cantor, chamados por ele de números da segunda classe. Obtemos estes números simplesmente estendendo o processo de contagem além da enumeração ordinária, isto é, através de uma continuação natural e unicamente determinada da contagem usual finita. (Hilbert, D., 1983)

Um número transfinito, de forma mais ampla, é a forma rigorosa usada pela matemática para contar o número de elementos de conjuntos infinitos. Cantor usava a letra $\aleph$ - aleph, primeira letra do alfabeto hebraico - para designar os números cardinais infinitos, utilizando índices $i$, $i \epsilon N$, para especificar os cardinais transfinitos, referindo-se à cardinalidade de cada grupo de números que estivesse sendo estudado.

Começou atribuindo aos números naturais o cardinal transfinito $\aleph_0$. Note que diversos outros conjuntos numéricos também terão essa mesma cardinalidade $\aleph_0$, como os números ímpares $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. Pode parecer estranho à primeira vista pensar que os números ímpares têm mesma cardinalidade dos números naturais, tendo em vista que aqueles formam um subconjunto destes, mas note que é possível construir uma relação biunívoca entre os números naturais e os pares, o que confirma que eles têm a mesma cardinalidade. De fato, ao pensar algebricamente, poder-se-ia imaginar que a cardinalidade dos números pares seria $\frac{\aleph_0}{2}$, mas, como $\aleph_0$ é um número infinito, então a divisão por 2 não estabelece um novo número transfinito, mas mantém o mesmo $\aleph_0$.

Outros conjuntos que têm a mesma cardinalidade $\aleph_0$ são os números pares, os números inteiros e até mesmo os números racionais. Para estes, uma forma de enxergar que é possível construir uma relação biunívoca com os números naturais é pensar em um plano cartesiano onde cada par $(x, y) \in R^2$ representa o número racional $\frac{x}{y}, y \neq 0$. Daí, a ideia é ir conectando esses pontos de tal forma que seria possível construí-los a partir da enumeração de números naturais, esclarecendo a construção da relação biunívoca.

Restringindo a construção a números positivos, sem perda de generalidade e apenas para facilitar a visualização, obtém-se uma situação como a apresentada na figura abaixo, na qual as setas representam o "caminho" que se deve seguir.

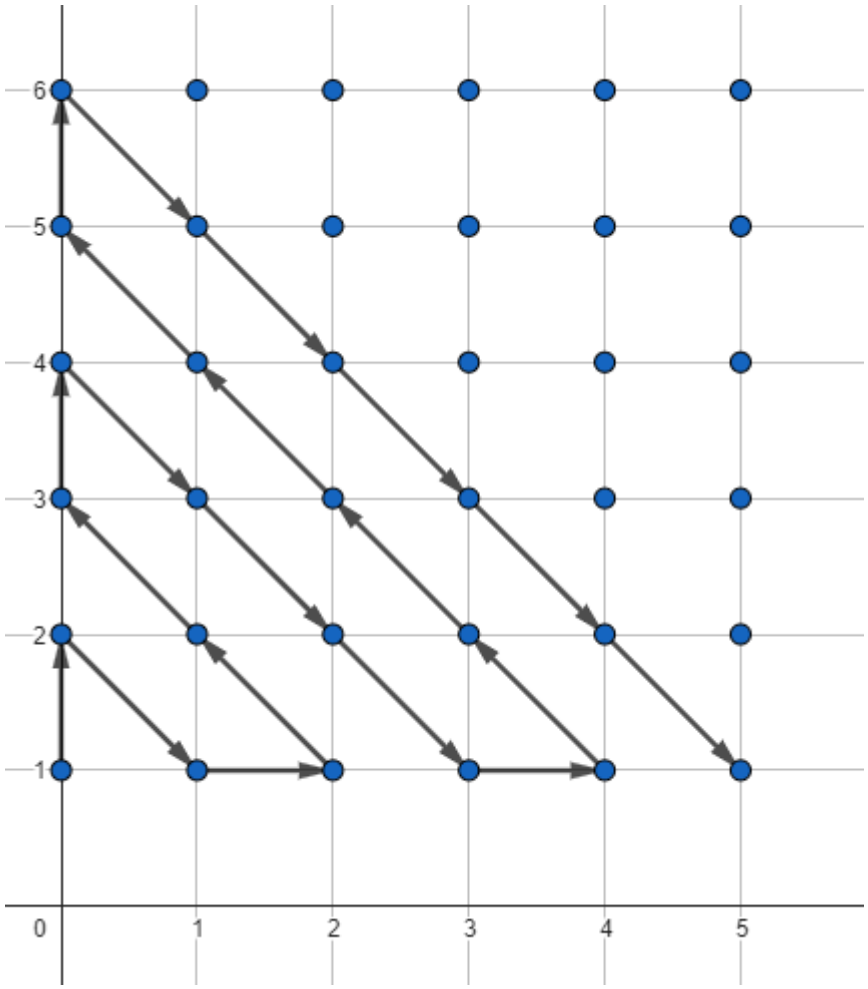


Figura: representação da formação da relação biunívoca dos inteiros para os naturais. Feito pelo *software* GeoGebra. Fonte: autoral.

Uma possível sequência para o estudo feito por Cantor é analisar a cardinalidade do conjunto das partes dos números naturais, isto é, o conjunto que contém todos os subconjuntos dos números naturais, denotado por $P(N)$. Uma possibilidade seria tentar ordenar $P(N)$ segundo a soma dos elementos de cada subconjunto, mas, seguindo tal lógica, não haveria formas de expressar os subconjuntos infinitos.

Em realidade, é possível provar que o número de elementos do conjunto das partes de um conjunto $A$ qualquer é sempre maior que o número de elementos de $A$, mesmo no caso em que $A$ tenha infinitos elementos. Na verdade, se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.

Cantor mostrou formalmente que $P(N)$ é um conjunto não enumerável, atribuindo o cardinal transfinito $\aleph_1$ para tal conjunto. A classe de todos os conjuntos que pertencem à mesma classe de equivalência que o conjunto das partes dos números naturais define o número cardinal $\aleph_1$.

Seguindo o estudo, a ideia é analisar a cardinalidade do conjunto dos números reais. Pode-se provar que ele não é equivalente ao conjunto dos números naturais e que, na verdade, tem a mesma cardinalidade do conjunto das partes dos números naturais, ou seja, atribui-se aos reais também o cardinal $\aleph_1$.

Para tal prova, tome o intervalo $[0, 1]$ e construa uma sequência X:

$x_1 = 0, d_{11}d_{21}d_{31}...$ (primeiro número do intervalo)

$x_2 = 0, d_{12}d_{22}d_{32}...$ (segundo número do intervalo)

$x_3 = 0, d_{13}d_{23}d_{33}...$ (terceiro número do intervalo)

$x_n = 0, d_{1n}d_{2n}d_{3n}...$ (n-ésimo número do intervalo)

Agora, tome um número de tal forma que:

$p_1 = 0, p_1p_2p_3...$ , em que, para $k = 1, 2, 3, ...$, $p_k = 1$, se $d_{kk} \neq 1$ e $p_k = 2$, se $d_{kk} = 1$.

Dessa forma, foi construído um número que não pertence a X, então não existe um número natural equivalente para enumerá-lo, ou seja, não possui cardinalidade $\aleph_0$. Logo, Cantor consegue provar, a partir de sua Hipótese do Contínuo, que a cardinalidade dos números reais será $\aleph_1$.

A partir do mesmo raciocínio usado anteriormente, o conjunto das partes dos números reais, dito $P(R)$, tem cardinalidade maior do que a do conjunto dos números reais, sendo atribuído a ele o cardinal transfinito $\aleph_2$. Este processo pode ser feito indefinidamente, obtendo cardinais $\aleph_i$, $i \epsilon N$.

## 5 O INFINITO E A LÓGICA: O PROGRAMA DE HILBERT

Após os esforços de Frege, Dedekind e Cantor para esclarecer os conceitos sobre infinito e para construir a Teoria dos Conjuntos, “o infinito atingiu o pináculo da glória” (Hilbert, D., 1983). Infelizmente, da mesma forma que teve seu ápice, sua queda foi extremamente vertiginosa. À época, os matemáticos estavam desesperados e eufóricos para estabelecer novos conceitos e teorias, o que os levou a serem desleixados em relação à validade dos métodos dedutivos usados ao longo de seus processos. Daí, como resultado de aplicações básicas de definições e métodos dedutivos já comuns e de conhecimento geral, começaram a surgir contradições.

As mais problemáticas destas contradições foram os paradoxos da Teoria dos Conjuntos, em especial o conhecido como Paradoxo de Russell. Em carta enviada por Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) a Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), em 16 de junho de 1902:

> Há apenas um ponto onde encontrei uma dificuldade. O colega diz que uma função também pode actuar como elemento indeterminado. Eu acreditava nisto, mas agora esta perspectiva parece-me duvidosa pela seguinte contradição. Seja $w$ o predicado: para ser predicado, não pode ser predicado de si próprio. Pode $w$ ser predicado de si próprio?

Ao usar a linguagem matemática atual, tal paradoxo seria escrito da seguinte forma:

Considere o conjunto $M$ como o conjunto de todos os conjuntos que não possuam a si próprios como elementos, isto é, $M = \{A/A \notin A\}$.

No sistema de Cantor, M é um conjunto bem definido. A ideia que levou ao paradoxo é pensar se M contém a si mesmo. Se sim, não é membro de M de acordo com a definição. Por outro lado, supondo que M não contém a si mesmo, tem de ser membro de M, também de acordo com a construção de M. Assim, as afirmações "M é membro de M" e "M não é membro de M" conduzem ambas a contradições.

Tal contradição levou ao caos no universo da matemática à época, levando Dedekind e Frege a abandonarem suas teorias recém feitas, reconhecendo que estavam indo no rumo errado. As ideias de Cantor também foram duramente criticadas e rejeitadas, fazendo com que até conceitos naturais e métodos matemáticos simples fossem ameaçados. Os matemáticos consideravam os paradoxos intoleráveis, afinal, as definições e métodos matemáticos reconhecidos e usados estavam levando a absurdos, desestruturando a todos que os usavam.

Para Hilbert (1983), há duas atitudes que devem ser tomadas para evitar os paradoxos sem desestruturar toda a matemática já estabelecida. A primeira seria investigar e fortalecer todas as definições e métodos indutivos que ainda tivessem alguma esperança de salvamento, enquanto a segunda seria estabelecer para todas as deduções matemáticas o mesmo grau de certeza das deduções realizadas na teoria elementar dos números, já extremamente consolidadas e indubitáveis. Para ele, tal tarefa só seria possível quando a natureza do infinito tivesse sido elucidada.

Ao longo da construção da teoria dos números, a ideia do infinito, ou da passagem para o infinito, aparece eventualmente. Por exemplo, ao estudar números primos, chega-se à conclusão de que, dado um número primo $p$, existe um outro número primo maior do que $p$ e menor ou igual do que $p! + 1$ – teorema euclidiano. Tomando apenas parte deste teorema para estudo, afirma-se que, dado um primo $p$, existe um outro primo maior do que $p$. Esta proposição parcial não é tão forte em termos de conteúdo, mas envolve um passo transfinito, por definir uma proposição existencial, isto é, nas palavras de Hilbert (1983), um *produto lógico infinito*.

O infinito é encontrado analisando uma proposição existencial cujo conteúdo não é expressável por uma disjunção finita. Além disso, uma proposição transfinita é obtida negando uma proposição geral que se refira a símbolos numéricos arbitrários. Por exemplo, sendo $a$ e $b$ símbolos numéricos, então a proposição $a + b = b + a$ é inegável em perspectiva finitária. Note que tal enunciado não pode ser visto como uma conjunção de infinitas equações numéricas, sendo somente um juízo hipotético. Ao encontrar proposições que podem ser negadas, obtêm-se as proposições transfinitas.

Para Hilbert (1983), é necessário formalizar as operações lógicas e demonstrações matemáticas, transformando relações lógicas em fórmulas, a fim de que não sejam criados novos paradoxos e problemas na Teoria dos Conjuntos. Para isso, são introduzidos símbolos lógicos, como os de conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), implicação ($\rightarrow$) e negação ($\neg$), além de variáveis lógicas, também chamadas de variáveis proposicionais, dadas por letras latinas maiúsculas (A, B, C, …)

Para que isso seja feito, é possível embasar-se no já existente cálculo lógico, cujos símbolos são consistentes com a perspectiva finitária de negar significado aos símbolos lógicos, como foi feito em relação aos símbolos matemáticos. Assim, declara-se que as fórmulas do cálculo lógico são proposições ideais sem qualquer significado próprio. A linguagem simbólica presente no cálculo lógico é capaz de transformar asserções

matemáticas em fórmulas e também de expressar a dedução lógica por meio de procedimentos formais. Daí, segundo Hilbert (1983):

> Em exata analogia com a transição da teoria material dos números à álgebra formal, tratamos agora os sinais e símbolos de operação do cálculo lógico abstraindo do seu significado. Desta forma, finalmente, obtemos, ao invés do conhecimento matemático material que é comunicado através da linguagem comum, somente uma coleção de fórmulas envolvendo símbolos lógicos e matemáticos que são gerados sucessivamente, de acordo com regras determinadas. Algumas dessas fórmulas correspondem a axiomas matemáticos e as regras segundo as quais fórmulas são derivadas umas das outras correspondem à dedução material. A dedução material é então substituída por um procedimento formal governado por regras. A passagem rigorosa do tratamento ingênuo para o formal, portanto, é levada a efeito tanto pelos axiomas (...), como pelo cálculo lógico.

Hilbert também discute como devem ser formalizadas as demonstrações matemáticas. Um ponto essencial para ele é a prova de consistência. Como se usam as ferramentas do cálculo lógico indistintamente, é imprescindível que, ao adicionar elementos ideais, verifique-se se tal extensão do domínio não leva ao aparecimento de contradições no domínio inicial, ou seja, se as relações válidas nas novas estruturas continuam válidas no domínio anterior.

Além da consistência, outros objetivos propostos pelo Programa de Hilbert eram a completude, onde Hilbert buscava demonstrar que toda afirmação verdadeira ou falsa dentro de uma teoria matemática poderia ser decidida a partir dos axiomas dessa teoria. Ou seja, ele queria que seu sistema axiomático fosse completo.

Por último, tem-se a decidibilidade, cuja vontade era tornar todos os problemas matemáticos decidíveis por algoritmos, sendo assim, queria elaborar um método efetivo para determinar se uma proposição matemática era verdadeira ou falsa.

Com isso, Hilbert montava sua teoria da prova, a qual ele acreditava ser capaz de criar uma base sólida para os fundamentos da matemática, bem como gerar um método geral para tratar questões matemáticas fundamentais, as quais não havia sido possível manejar até então. Tal teoria não gera um método geral para resolver qualquer problema matemático, até porque isso não existe, mas prova que a hipótese da solubilidade de todos os problemas matemáticos não é uma contradição.

Para finalizar, pensando na ideia do infinito, conclui-se que ele não se encontra na realidade em lugar algum da natureza, o que impede que seja possível construir uma base

para o pensamento racional. Sendo assim, apesar dos esforços de Frege e Dedekind, são necessários ao conhecimento científico alguns conceitos e juízos preliminares, tornando insuficiente a lógica por si só.

Segundo Hilbert (1983), “as operações com o infinito só podem ser tornadas seguras através do finitário”, restando ao infinito somente a função de uma ideia, ou seja, um conceito da razão que transcende a experiência e que completa o concreto como uma totalidade. E é claro, só é possível confiar sem hesitação nessa ideia graças à teoria extremamente conceitual e bem estruturada elaborada ao longo dos séculos pelos matemáticos.

## 6 CONCLUSÃO

Com o passar dos anos, mesmo sendo muito considerado, o Programa de Hilbert encontrou diversos obstáculos, boa parte por conta do trabalho de Kurt Gödel. Em 1931, Gödel apresentou seu renomado Teorema da Incompletude, revelando que alcançar simultaneamente os objetivos de consistência e completude em sistemas axiomáticos era impossível. O Teorema da Incompletude estabeleceu que qualquer teoria consistente com poder suficiente para codificar operações como adição e multiplicação de inteiros é incapaz de demonstrar sua própria consistência, o que contradiz a maior parte do programa de Hilbert. Nas eras atuais, um argumento em prol do Teorema da Incompletude de Kurt foi trazido por Kadvany (1989):

> A simples observação de como os teoremas de Gödel criaram uma condição para pós-modernidade começa com o primeiro teorema de incompletude. Este teorema diz, de fato, que um sistema axiomático consistente, forte o suficiente para provar alguns resultados básicos da teoria elementar dos números, será incompleto: sempre haverá sentenças formuladas pela sintaxe do sistema em consideração que não serão nem demonstráveis nem refutáveis dentro do sistema. Tais sentenças são ditas indemonstráveis com respeito ao sistema. Tomando a sentença indemonstrável e sua negação, podemos estender o antigo sistema em dois novos sistemas mutuamente incompatíveis, pela adição da sentença indemonstrável, ou de sua negação, como um novo axioma. O exemplo clássico deste procedimento é a produção da geometria não-euclidiana a partir da adição da negação do postulado das paralelas como axioma da geometria elementar sem o postulado das paralelas. Os novos sistemas construídos também terão novas sentenças indemonstráveis, diferentes das originais, e o processo de construção de novas sentenças indemonstráveis e de novos sistemas capazes de incorporar essas novas sentenças e suas negações seguirão *ad infinitum*.

Embora o Programa de Hilbert não tenha sido completamente realizado conforme os termos originais propostos, sua influência é mantida, gerando discussões inclusive acerca das capacidades de racionalização da mente humana, e as questões levantadas continuam a ser essenciais para a filosofia e a lógica matemáticas.

**REFERÊNCIAS**

CONJUNTO de partes. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_partes. Acesso em: 11 nov. 2023.

FERREIRA, Fernando. No paraíso, sem convicção: uma explicação do programa de Hilbert. In. COELHO, Furtado (ORG). Matemática e Cultura II. Lisboa: Centro Nacional de Cultura e SPB Editores, 1995.

FREGE, Gottlob. The thought: a logical inquiry. Mind, JSTOR, v. 65, n. 259, 1956, p. 289-311.

HILBERT, David. “On the infinite”, in Philosophy of Mathematics selected Readings, Cambridge University press, 1983, pp 183-201 (Tradução do prof. Walter Carnielli).

Hrbacek, Karen; Jech, Thomas (1999). Introduction to set theory (em inglês) 3a. ed. New York: Marcel Dekker

JEANRENAUD, Maria de Lourdes Rocha de Assis; MARTINS, Daniel F. Neves . A questão do Infinito em Hilbert. In: 13 Seminário Nacional de História da Ciência e Tecnologia, 2012, São Paulo. 13 Seminário Nacional da Ciência e da Tecnologia - Anais Eletrônicos, 2012.

John J. O’Connor, Edmund F. Robertson: Richard Dedekind. Disponível em: MacTutor History of Mathematics archive. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dedekind/

KADVANY, J. Reflection on the legacy of Kurt Gödel: Mathematics, Skepticism, Postmodernism. The Philosophical Forum 20 (1989).

NÚMERO transfinito. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_transfinito. Acesso em: 11 nov. 2023.

PARADOXO de Russell. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Paradoxo_de_Russell. Acesso em: 12 nov. 2023.

REID, Constance. “Hilbert”. Springer Verlag, 1970.

ROQUE, Tatiana. História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. São Paulo: Zahar, 2012.