

## **LISTA 3A**

### **EXERCÍCIOS PARA ENTREGA (em destaque)**

CAPÍTULO 8:

**Problemas:** 8.1, 8.18, 8.20

CAPÍTULO 9:

**Problemas:** 9.7, 9.15, 9.20

CAPÍTULO 10:

**Problemas:** 10.1, 10.7, 10.9

CAPÍTULO 11:

**Problemas:** 10.5, 10.6, 10.7, 10.9

CAPÍTULO 12:

**Problemas:** 12.1, 12.14, 12.16, 12.19

Componente	Massa, Kg (vazio)	Massa de combustível (Kg)	Massa total (Kg)	Tempo de ignição (s)	Empuxo (Kgf)	Função
1º estágio	140.000	2.000.000 (querosene + O <sub>2</sub> líquido)	2.140.000	140	3.400.000	De 0 até 8.000 Km/h a 65 Km de altitude
2º estágio	36.000	420.000 (H <sub>2</sub> líquido + O <sub>2</sub> líquido)	456.000	370	450.000	De 8.000 a 24.000 Km/h a 180 Km de altitude
3º estágio	10.000	105.000 (H <sub>2</sub> líquido + O <sub>2</sub> líquido)	115.000	475	90.000	Injeção em órbita lunar a 40.000 Km/h.
Apolo (módulo lu- nar, módulo de comando e módulo de serviço)	12.000	11.000 (combustíveis líquidos e sólidos)	23.000		10.000	Missões lunares; retorno à Terra

A massa total do sistema é de  $\approx 2.700.000$  kg; o foguete tem 120 m de altura e 5 m de raio.

É instrutivo verificar a consistência da tabela acima com as fórmulas obtidas (faça isso!). Os valores de  $dm/dt$  podem ser calculados dividindo a massa de combustível de cada estágio pelo tempo de ignição correspondente. O empuxo  $(dm/dt) v_e$  (cf. (8.5.12)) se obtém levando em conta os valores de  $v_e$  dados à pg. 162 para os diferentes combustíveis, bem como a variação de  $v_e$  conforme a altitude em que a combustão ocorre, também já mencionada.

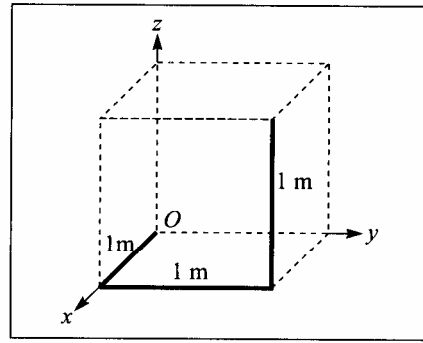
A velocidade final atingida pelo 1º estágio é muito inferior à que resultaria da (8.6.8). Isto se deve, naturalmente, ao fato de que na (8.6.8) não foram levados em conta forças externas (cf. (8.6.1)), e a resistência do ar, bem como a força-peso gravitacional, reduzem consideravelmente a velocidade atingida antes que o foguete alcance altitudes maiores.

## PROBLEMAS DO CAPÍTULO 8

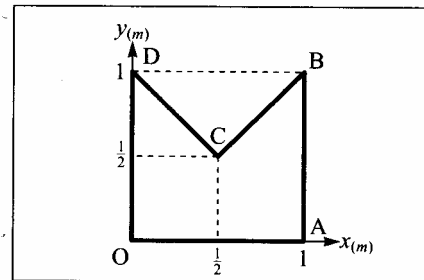
- Dois veículos espaciais em órbita estão acoplados. A massa e um deles é de 1.000 kg e a do outro 2.000 kg. Para separá-los, é detonada entre os dois uma pequena carga explosiva, que comunica uma energia cinética total de 3.000 J ao conjunto dos dois veículos, em relação ao centro de massa do sistema. A separação ocorre segundo a linha que une os centros de massa dos dois veículos. Com que velocidade relativa ele se separam um do outro?
- Um atirador, com um rifle de 2 kg apoiado ao ombro, dispara uma bala de 15 g, cuja velocidade na boca da arma (extremidade do cano) é de 800 m/s. (a) Com que velocidade inicial a arma recua? (b) Que impulso transmite ao ombro do atirador? (c) Se o recuo é absorvido pelo ombro em 0,05 s, qual é a força média exercida sobre ele, em N e em kgf?

3. Um canhão montado sobre uma carreta, apontado numa direção que forma um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal, atira uma bala de 50 kg, cuja velocidade na boca do canhão é de 300 m/s. A massa total do canhão e da carreta é de 5 toneladas. (a) Calcule a velocidade inicial de recuo da carreta. (b) Se o coeficiente de atrito cinético é 0,7, de que distância a carreta recua?
4. Uma patinadora e um patinador estão-se aproximando um do outro, deslizando com atrito desprezível sobre uma pista de gelo, com velocidades de mesma magnitude, igual a 0,5 m/s. Ela tem 50 kg, carrega uma bola de 1 kg e patina numa direção  $10^\circ$  a leste da direção norte. Ele tem 51 kg, dirige-se para  $10^\circ$  a oeste da direção norte. Antes de colidirem, ela lança a bola para ele, que a apanha. Em consequência, passam a afastar-se um do outro. Ela se move agora com velocidade de 0,51 m/s, numa direção  $10^\circ$  a oeste da direção norte. (a) Em que direção se move o patinador depois de apanhar a bola? (b) Com que velocidade? (c) Qual foi o momento transferido da patinadora para o patinador? (d) Com que velocidade e em que direção a bola foi lançada? [Note que a deflexão das trajetórias produzida pela troca da bola é análoga ao efeito de uma força repulsiva entre os dois patinadores. Na física das partículas elementares, a interação entre duas partículas é interpretada em termos de troca de uma terceira partícula entre elas].
5. Um remador de 75 kg, sentado na popa de uma canoa de 150 kg e 3 m de comprimento, conseguiu traze-la para uma posição em que está parada perpendicularmente à margem de um lago, que nesse ponto forma um barranco, com a proa encostada numa estaca onde o remador quer amarrar a canoa. Ele se levanta e caminha até a proa, o que leva a canoa a afastar-se da margem. Chegando à proa, ele consegue, esticando o braço, alcançar até uma distância de 80 cm da proa. Conseguirá agarrar a estaca? Caso contrário, quanto falta? Considere o centro de massa da canoa como localizado em seu ponto médio e despreze a resistência da água.
6. No fundo de uma mina abandonada, o vilão, levando a mocinha como refém, é perseguido pelo mocinho. O vilão, de 70 kg, leva a mocinha, de 50 kg, dentro de um carrinho de minério de 540 kg, que corre com atrito desprezível sobre um trilho horizontal, à velocidade de 10 m/s. O mocinho, de 60 kg, vem logo atrás, num carrinho idêntico, à mesma velocidade. Para salvar a mocinha, o mocinho pula de um carrinho para o outro, com uma velocidade de 6 m/s em relação ao carrinho que deixa para trás. Calcule a velocidade de cada um dos carrinhos depois que o mocinho já atingiu o carrinho da frente.
7. Um gafanhoto, pousado na beirada superior de uma folha de papel que está boiando sobre a água de um tanque, salta, com velocidade inicial de 4 m/s, em direção à beirada inferior da folha, no sentido do comprimento. As massas do gafanhoto e da folha são de 1g e de 4g, respectivamente, e o comprimento da folha é de 30 cm. Em que domínio de valores pode estar compreendido o ângulo  $\theta$  entre a direção do salto e a sua projeção sobre a horizontal para que o gafanhoto volte a cair sobre a folha?
8. Um rojão, lançado segundo um ângulo de  $45^\circ$ , explode em dois fragmentos ao atingir sua altura máxima, de 25 m; os fragmentos são lançados horizontalmente. Um deles, de massa igual a 100 g, cai no mesmo plano vertical da trajetória inicial, a 90 m de distância do ponto de lançamento. O outro fragmento tem massa igual a 50 g. (a) A que distância do ponto de lançamento cai o fragmento mais leve? (b) Quais são as velocidades comunicadas aos dois fragmentos em consequência da explosão? (c) Qual é a energia mecânica liberada pela explosão?
9. Uma mina explode em três fragmentos, de 100 g cada um, que se deslocam num plano horizontal: um deles para oeste e os outros dois em direções  $60^\circ$  ao norte e  $30^\circ$  ao sul da direção leste, respectivamente. A energia cinética total liberada pela explosão é de 4.000 J. Ache as velocidades iniciais dos três fragmentos.

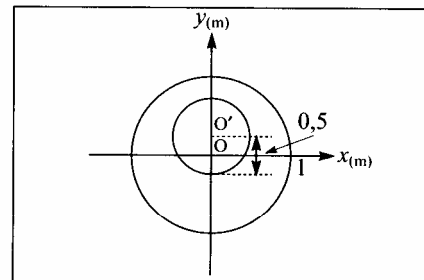
10. Uma barra cilíndrica homogênea de 3 m de comprimento é dobrada duas vezes em ângulo reto, a intervalos de 1 m de modo a formar três arestas consecutivas de um cubo (Fig.). Ache as coordenadas do centro de massa da barra, no sistema de coordenadas da figura.



11. (a) Ache as coordenadas do CM (centro de massa) da placa homogênea OABCD indicada na figura, dividindo-a em três triângulos iguais. (b) Mostre que se obtém o mesmo resultado calculando o CM do sistema formado pelo quadrado OABD e pelo triângulo BCD que dele foi removido, atribuindo massa negativa ao triângulo.



12. Calcule as coordenadas do CM da placa homogênea indicada na figura, um círculo de 1,0 m de raio do qual foi removido um círculo de 0,5 m de raio, com uma separação de 0,25 m entre os centros O e O' dos dois círculos.



13. Num lançamento do foguete Saturno V (veja tabela da pg. 164) são queimadas 2.100 toneladas de combustível em 2,5 min, gerando um empuxo de  $3,4 \times 10^7$  N. A massa total do foguete com sua carga é de 2.800 toneladas. (a) Calcule a velocidade de escape do combustível empregado. (b) Calcule a aceleração inicial do foguete na rampa de lançamento.
14. Utilizando os dados da tabela da pg. 164, calcule, para o 3º estágio do sistema Saturno V - Apolo: (a) a velocidade de escape dos gases de combustão; (b) o incremento de velocidade produzido por este estágio, na ausência de forças externas. A diferença entre o resultado e os valores da tabela pode ser atribuída a essas forças (gravidade e resistência atmosférica residuais).
15. Um avião a jato viaja a 900 km/h. Em cada segundo, penetram nos jatos  $150 \text{ m}^3$  de ar que, após a combustão, são ejetados com uma velocidade de 600 m/s em relação ao avião. Tome a densidade do ar como  $1,3 \text{ kg/m}^3$ . (a) Calcule o empuxo exercido sobre o avião em N e em kgf. (b) Calcule a potência dos jatos, em W e em hp.
16. Uma corrente de massa igual a 750 g e 1,5m de comprimento está jogada no chão. Uma pessoa segura-a por uma das pontas e suspende-a verticalmente, com velocidade

constante de 0,5 m/s. (a) Calcule a razão entre a força exercida pela pessoa no instante final, em que está terminando de tirar a corrente do chão, e a força que teve de exercer no instante inicial. (b) Qual é o trabalho realizado?

17. Um encantador de serpentes, tocando sua flauta, faz uma serpente de comprimento  $l$  e massa  $m$ , inicialmente enrodilhada no chão, elevar gradualmente a cabeça até uma altura  $h < l$  do chão. Supondo a massa da serpente uniformemente distribuída pelo seu corpo, quanto trabalho foi realizado pela serpente?

18. Uma gotícula de água começa a formar-se e vai-se avolumando na atmosfera em torno de um núcleo de condensação, que é uma partícula de poeira, de raio desprezível. A gota cai através da atmosfera, que supomos saturada de vapor de água, e vai aumentando de volume continuamente pela condensação, que faz crescer a massa proporcionalmente à superfície da gota. A taxa  $\lambda$  de crescimento da massa por unidade de tempo e de superfície da gota é constante. (a) Mostre que o raio  $r$  da gota cresce linearmente com o tempo. (b) Mostre que a aceleração da gota, decorrido um tempo  $t$  desde o instante em que ela começou a se formar, é dada por

$$\frac{dv}{dt} = -g - 3\frac{v}{t}$$

onde  $v$  é a velocidade da gota no instante  $t$  (desprezando o efeito da resistência do ar). (c) Mostre que esta equação pode ser resolvida tomando  $v = at$ , e determine a constante  $a$ . Que tipo de movimento resulta para a gota?

19. Um caminhão-tanque cheio de água, de massa total  $M$ , utilizado para limpar ruas com um jato de água, trafega por uma via horizontal, com coeficiente de atrito cinético  $\mu_c$ . Ao atingir uma velocidade  $v_0$ , o motorista coloca a marcha no ponto morto e liga o jato de água, que é enviada para trás com a velocidade  $v_e$  relativa ao caminhão, com uma vazão de  $\lambda$  litros por segundo. Ache a velocidade  $v(t)$  do caminhão depois de um tempo  $t$ .

20. Uma nave espacial cilíndrica, de massa  $M$  e comprimento  $L$ , está flutuando no espaço sideral. Seu centro de massa, que podemos tomar como o seu ponto médio, é adotado como origem  $O$  das coordenadas, com  $Ox$  ao longo do eixo do cilindro. (a) No instante  $t = 0$ , um astronauta dispara uma bala de revólver de massa  $m$  e velocidade  $v$  ao longo do eixo, da parede esquerda até a parede direita, onde fica encravada. Calcule a velocidade  $V$  de recuo da nave espacial. Suponha que  $m \ll M$ , de modo que  $M \pm m \approx M$ . (b) Calcule o recuo total  $\Delta X$  da nave, depois que a bala atingiu a parede direita. Exprima-o em função do momento  $p$  transportado pela bala, eliminando da expressão a massa  $m$ . (c) Calcule o deslocamento  $\Delta x$  do centro de massa do sistema devido à transferência da massa  $m$  da extremidade esquerda para a extremidade direita da nave. (d) Mostre que  $\Delta X + \Delta x = 0$ , e explique por que este resultado tinha necessariamente de ser válido.

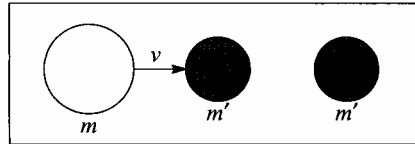
(e) Suponha agora que o astronauta, em lugar de um revólver, dispare um canhão de luz laser. O pulso de radiação laser, de energia  $E$ , é absorvido na parede direita, convertendo-se em outras formas de energia (térmica, por exemplo). Sabe-se que a radiação eletromagnética, além de transportar energia  $E$ , também transporta momento  $p$ , relacionado com  $E$  por:  $p = E/c$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. Exprima a resposta do item (b) em termos de  $E$  e  $c$ , em lugar de  $p$ .

(f) Utilizando os itens (c) e (d), conclua que a qualquer forma de energia  $E$  deve estar associada uma massa inercial  $m$ , relacionada com  $E$  por  $E = mc^2$ . Um argumento essencialmente idêntico a este, para ilustrar a inércia da energia, foi formulado por Einstein (veja *Física Básica*, vol. 4).

## PROBLEMAS DO CAPÍTULO 9

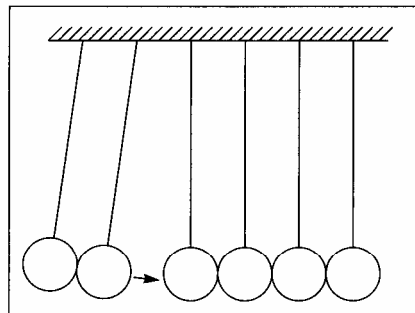
1. Calcule a magnitude (em kgf) da força impulsiva que atua em cada um dos exemplos seguintes: (a) Num saque de jogo de tênis, a bola, de massa igual a 60 g, é lançada com uma velocidade de 40 m/s; o tempo de contato com a raquete é da ordem de 0,005 s. (b) Um jogador de futebol cobra um pênalti, chutando a bola com uma velocidade de 20 m/s. A massa da bola é de 450 g e a duração do chute da ordem de 0,01 s. (c) Uma pessoa de 80 kg pula do alto de um muro de 2,5 m de altura, caindo em pé (sem dobrar os joelhos). A duração do impacto é de 0,01s. É melhor dobrar os joelhos! (d) Um carro de 1,5 tonelada, a 60 km/h, bate num muro. A duração do choque é de 0,1 s.
2. Na teoria corpuscular da luz, no século 17, imaginava-se um feixe de luz como constituído de corpúsculos muito pequenos, movendo-se com velocidade muito elevada. A reflexão da luz num espelho seria produzida pela colisão dos corpúsculos luminosos com o mesmo, de forma análoga a uma colisão elástica com uma parede impenetrável. Ao atravessar a superfície de separação entre dois meios transparentes distintos (ar e água, por exemplo), um corpúsculo luminoso teria sua velocidade alterada pelo efeito de uma força impulsiva normal à superfície de separação, prosseguindo depois em seu movimento, livre da ação de forças. Sejam  $\theta_1$ ,  $\theta'_1$  e  $\theta_2$  os ângulos de incidência, reflexão, e refração respectivamente. Mostre que este modelo explicaria as leis da reflexão e da refração: raios refletido e refratado no plano de incidência, com  $\theta'_1 = \theta_1$ ,  $\text{sen}\theta_1/\text{sen}\theta_2 = n_{12}$ , e calcule o índice de refração relativo  $n_{12}$  do segundo meio em relação ao primeiro em função das velocidades  $v_1$  e  $v_2$  dos corpúsculos nos meios 1 e 2. A velocidade dos corpúsculos seria maior no ar ou na água?
3. Considere a colisão elástica entre duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  que se movem em uma dimensão. (a) Verifique, a partir das (9.4.11), que a velocidade do CM se conserva na colisão. (b) Calcule as velocidades iniciais  $v'_{1i}$ ,  $v'_{2i}$  das duas partículas em relação ao CM do sistema, exprimindo-as em função da velocidade relativa inicial  $v_{ri}$  da partícula 2 em relação à partícula 1 e da massa total  $M = m_1 + m_2$ . Qual é a relação entre  $v'_{ri}$  e  $v_{ri}$ ? (c) Faça o mesmo para as velocidades finais  $v'_{1f}$  e  $v'_{2f}$  em relação ao CM, com auxílio das (9.4.11). Qual é a relação entre  $v'_{rf}$  e  $v_{rf}$  (a velocidade relativa final)? E entre  $v'_{rf}$  e  $v'_{ri}$ ? (d) Interprete os resultados de (a) a (c), descrevendo como ocorre a colisão vista do referencial do CM.
4. Considere um sistema qualquer de duas partículas, de massas  $m_1$  e  $m_2$  e velocidades  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ . Sejam  $T_1$  e  $T_2$  as energias cinéticas das duas partículas, e  $\mathbf{v}_r$  a velocidade relativa da partícula 2 em relação à partícula 1. (a) Mostre que os momentos das duas partículas em relação ao CM são dados por:  $\mathbf{p}'_1 = -\mu\mathbf{v}_r = -\mathbf{p}'_2$ , onde  $\mu = m_1 m_2/M$  (com  $M = m_1 + m_2$ ) chama-se a *massa reduzida* do sistema de duas partículas. Note que  $1/\mu = (1/m_1) + (1/m_2)$ . (b) Mostre que a energia cinética total é dada por  $T_1 + T_2 = T'_1 + T'_2 + \frac{1}{2} M\mathbf{v}_{CM}^2$ , onde  $T'_1$  e  $T'_2$  são as energias cinéticas relativas ao CM e  $\mathbf{v}_{CM}$  é a velocidade do CM. (c) Mostre que a energia cinética relativa ao CM (energia cinética interna) é dada por  $T'_1 + T'_2 = \frac{1}{2} \mu\mathbf{v}_r^2$ . Combinando os resultados de (b) e (c), vemos que a *energia cinética total* é a soma da *energia cinética associada ao movimento do CM*, com *massa igual à massa total*, mais a *energia cinética do movimento relativo*, equivalente à de uma partícula de massa igual a *massa reduzida* e *velocidade igual à velocidade relativa*. Mostre que, para um sistema isolado de duas partículas, a energia cinética interna se conserva numa colisão elástica entre elas. Mostre que o fator  $Q$  de uma colisão inelástica (Seç. 9.7) é igual a variação da energia cinética interna.

5. Uma partícula de massa  $m$  desloca-se com velocidade  $v$  em direção a duas outras idênticas, de massa  $m'$ , alinhadas com ela, inicialmente separadas e em repouso (veja fig.). As colisões entre as partículas são todas elásticas. (a) Mostre que, para  $m \leq m'$  haverá duas colisões, e calcule as velocidades finais das três partículas. (b) Mostre que, para  $m > m'$ , haverá três colisões, e calcule as velocidades finais das três partículas. (c) Verifique que, no caso (a), o resultado para a primeira e a terceira partícula é o mesmo que se a partícula intermediária não existisse.



6. (a) Que fração  $f$  da energia cinética é transferida por uma partícula de massa  $m$ , que se move com velocidade  $v$ , numa colisão frontal elástica com uma partícula de massa  $m'$  inicialmente em repouso? Exprima o resultado em função da razão  $\lambda = m'/m$ . Para que valor de  $\lambda$  a transferência é máxima, e quanto vale? (b) Coloca-se entre as duas partículas uma terceira, de massa  $m''$ , em repouso, alinhada com  $m$  e  $m'$ . Mostre que a transferência de energia cinética de  $m$  para  $m'$  é máxima quando  $m'' = \sqrt{mm'}$ . Mostre que, para  $m \neq m'$ , a presença da partícula intermediária possibilita transferir mais energia cinética de  $m$  para  $m'$  do que no caso (a).

7. Num brinquedo bem conhecido, uma série de bolinhas metálicas idênticas, suspensas por fios idênticos presos a um suporte, estão inicialmente todas em contato. Se um determinado número  $n$  de bolas é deslocado conjuntamente da posição de equilíbrio e solto (Fig.), o efeito da colisão com as demais é transferir a velocidade  $v$  com que colidem a um igual número de bolas na outra extremidade, suspendendo-as. (a) Supondo que o efeito da colisão fosse transferir uma velocidade  $v'$  a  $n'$  bolas adjacentes situadas na outra extremidade, as colisões sendo todas elásticas, mostre que se tem, necessariamente,  $n' = n$  e  $v' = v$ . (b) Tomando  $n = 2$ , e supondo que o efeito da colisão fosse transferir velocidades  $v_1$  e  $v_2$  às duas bolas situadas mais à direita (fig), mostre que, necessariamente  $v_1 = v_2 = v$ .



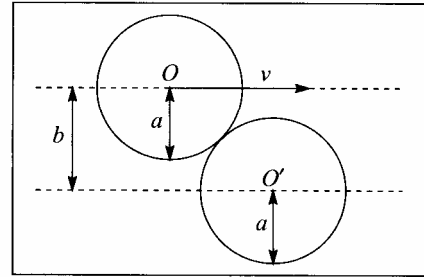
8. Uma bala de 5g incide sobre um pêndulo balístico de massa igual a 2 kg, com uma velocidade de 400 m/s, atravessa-o e emerge do outro lado com uma velocidade de 100 m/s. Calcule a altura de elevação do pêndulo, desprezando a elevação durante o tempo que a bala leva para atravessá-lo. Verifique a validade desta aproximação.
9. Durante a madrugada, um carro de luxo, de massa total igual a 2.400 kg, bate na traseira de um carro de massa total 1.200 kg, que estava parado num sinal vermelho. O motorista do carro de luxo alega que o outro estava com as luzes apagadas, e que ele vinha reduzindo a marcha ao aproximar-se do sinal, estando a menos de 10 km/h quando o acidente ocorreu. A perícia constata que o carro de luxo arrastou o outro de uma distância igual a 10,5m, e estima o coeficiente de atrito cinético com a estrada no local do acidente em 0,6. Calcule a que velocidade o carro de luxo vinha realmente.

10. O balconista de uma mercearia, para atender a um cliente que pediu 200 g de creme de leite fresco, coloca o recipiente vazio sobre uma balança de mola, acerta o zero e despeja o creme sobre o recipiente desde uma altura de 75 cm. Depois de 2 s, com a balança marcando 200 g, o balconista, mais que depressa, retira o recipiente de cima da balança. Que quantidade de creme de leite o cliente realmente leva?
11. Um caminhão carregado, de massa total 3 toneladas, viajando para o norte a 60 km/h, colide com um carro de massa total 1 tonelada, trafegando para leste a 90 km/h, num cruzamento. Calcule em que direção e de que distância o carro é arrastado pelo caminhão, sabendo que o coeficiente de atrito cinético no local do acidente é 0,5.
12. Uma partícula de velocidade  $v_0$  colide elasticamente com outra idêntica em repouso. No referencial do CM, a direção de movimento é desviada de  $60^\circ$  em virtude da colisão. Calcule os ângulos de deflexão, em relação à direção de movimento da partícula incidente, e as magnitudes das velocidades das duas partículas após a colisão, no referencial do laboratório.
13. Um átomo de hidrogênio, movendo-se com velocidade  $v$ , colide elasticamente com uma molécula de hidrogênio em repouso, sofrendo uma deflexão de  $45^\circ$ . Calcule: (a) a magnitude da velocidade do átomo após a colisão; (b) a direção de movimento da molécula (com respeito à direção inicial de movimento do átomo) e a magnitude de sua velocidade.
14. Uma partícula de massa  $m$  e velocidade inicial  $\mathbf{u}$  colide elasticamente com outra de massa  $M$ , inicialmente em repouso no referencial do laboratório. Após a colisão, a partícula de massa  $m$  foi defletida de um ângulo de  $90^\circ$ , e a magnitude da sua velocidade foi reduzida para  $u/\sqrt{3}$ , onde  $u = |\mathbf{u}|$ . A partícula de massa  $M$  emerge da colisão com velocidade de magnitude  $v$ , numa direção que faz um ângulo  $\theta$  com  $\mathbf{u}$ . (a) Determine  $\theta$ ; (b) Calcule a razão  $\lambda = M/m$  e o valor de  $v$ . (c) Determine os ângulos  $\theta'_m$  e  $\theta'_M$  entre as direções de movimento finais de  $m$  e  $M$ , respectivamente, e a direção de  $\mathbf{u}$ , no referencial do CM.
15. A descoberta do neutron pelo físico inglês James Chadwick em 1932 baseou-se na seguinte observação: o berílio, quando bombardeado por partículas alfa, produzia partículas neutras, de massa e velocidade desconhecidas. Quando estas partículas colidiam elasticamente com prótons, a velocidade máxima de recuo dos prótons era de  $3,3 \times 10^7$  m/s. Quando colidiam elasticamente com núcleos de nitrogênio (de massa  $\approx 14$  vezes a do próton), a velocidade máxima de recuo dos núcleos de nitrogênio era de  $4,7 \times 10^6$  m/s  $\pm 10\%$ . Que podemos concluir destes dados sobre: (a) a razão da massa das partículas neutras desconhecidas para a massa do próton? (b) a velocidade das partículas desconhecidas?
16. Qual é o ângulo máximo de espalhamento elástico de uma partícula alfa por um neutron em repouso? (massa da alfa  $\approx 4 \times$  massa do neutron). Neste ângulo, que fração da energia cinética incidente vai para o neutron de recuo, e qual é o ângulo entre a direção do recuo e a de incidência?



17. Na reação  $d + d \rightarrow p + t$ , cujo fator  $Q$  é de 4 MeV (Seç. 9.7), tem-se um feixe de  $d$  de 3 MeV incidente sobre um alvo contendo  $d$  em repouso. Tome as massas como sendo  $m_p = 1$  u.m.a. (unidade de massa atômica),  $m_d = 2$  u.m.a. e  $m_t = 3$  u.m.a.. (a) Qual é a energia (em MeV) dos  $p$  emergentes a  $45^\circ$  da direção de incidência? (b) Qual é a energia dos  $t$  associados a esses  $p$ ? (c) Em que direção emergem estes  $t$ , relativamente à direção de incidência?
18. O espalhamento elástico de um próton por um núcleo alvo desconhecido em repouso é observado numa câmara de bolhas, onde existe um campo magnético perpendicular ao plano de movimento do próton. Verifica-se que o próton é desviado de  $60^\circ$  e que o raio de curvatura da sua trajetória é reduzido por um fator de 0,946 em consequência da colisão. Identifique o núcleo alvo.

19. Um disco circular de raio  $a$ , que se desloca sobre um colchão de ar com velocidade  $v$  e atrito desprezível, colide com um disco idêntico em repouso. O parâmetro de choque é  $b$  (cf. Fig. e Seç. 9.6). (a) Considere a colisão no referencial do CM. Levando em conta que a força de contato entre os discos no instante da colisão está dirigida segundo a linha que une os dois centros  $O$  e  $O'$ , determine o ângulo de que se desviam os momentos dos dois discos neste referencial. (b) Determine as direções e magnitudes das velocidades dos dois discos após a colisão, no referencial do laboratório.



20. Para explicar a resistência do ar (mais geralmente, de qualquer fluido) ao movimento de um corpo através dele, Newton propôs o seguinte modelo. O fluido é imaginado como sendo composto de um grande número ( $n$  por unidade de volume) de partículas em repouso, de massa  $m$  (muito pequena) cada uma. Quando o corpo, de massa  $M \gg m$ , se desloca com velocidade  $v$  através do fluido, ele vai colidindo com as partículas e vai-lhes transferindo momento dessa forma. A força  $F$  de resistência do fluido resultante é proporcional ao quadrado da velocidade. Calcule essa força, se o corpo é uma placa de área  $A$  que se desloca perpendicularmente ao plano da placa, como função de  $A$ ,  $v$  e da densidade  $\rho = nm$  do fluido.

$$U = \sum_{\substack{i \neq j \\ \text{pares distintos}}} \sum_{j=1}^N U_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N U_{ij} \quad (10.11.6)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  tomam todos os valores diferentes de 1 a  $N$  que correspondem a pares distintos. Para isto, como indicado, basta restringir a soma a  $i < j$ , o que impede que o mesmo par seja contado duas vezes (o par 2 1 é o mesmo que 1 2); isto foi feito na (10.11.5). Também podemos remover esta restrição, contando cada par duas vezes, e dividindo por 2 o resultado:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N U_{ij} = -\frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (10.11.7)$$

Se as partículas estão sujeitas unicamente à interação gravitacional entre elas, a *energia total* do sistema é

$$E = T + U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 + U \quad (10.11.8)$$

onde  $T$  é a energia cinética total e  $v_i$  é a velocidade da partícula  $i$ . Como a força gravitacional é conservativa, a energia total se conserva no tempo, embora as velocidades  $v_i$  e as distâncias  $r_{ij}$  variem com o tempo. É o que sucede, por exemplo, no movimento do sistema planetário como um todo em redor do Sol. O fato de que a energia potencial do sistema é negativa significa que se trata de um sistema *ligado*: seria preciso *fornecer* energia aos planetas para removê-los a uma distância infinita uns dos outros e do Sol ( $r_{ij} \rightarrow \infty$ ), onde a interação gravitacional seria nula. Por outro lado, a contração gravitacional de uma estrela ou de uma galáxia diminui as distâncias  $r_{ij}$ , e por conseguinte também o valor de  $U$  ( $|U|$  aumenta e  $U < 0$ ). A energia assim despreendida pode transformar-se em energia cinética ou converter-se em outras formas de energia.

## PROBLEMAS DO CAPÍTULO 10

1. Em 1968, a nave espacial Apolo 8 foi colocada numa órbita circular em torno da Lua, a uma altitude de 113 km acima da superfície. O período observado dessa órbita foi de 1h 59 min. Sabendo que o raio da Lua é de 1.738 km, utilize esses dados para calcular a massa da Lua.
2. Considere um satélite em órbita circular próxima da superfície de um planeta. (a) Mostre que o período  $T$  dessa órbita só depende da densidade média do planeta, e não de sua massa total. (b) Calcule o valor de  $T$  para a Terra, para a qual  $\rho = 5,52 \text{ kg/m}^3$ , desprezando os efeitos da atmosfera sobre a órbita. (c) Ainda no caso da Terra, calcule a velocidade do satélite nessa órbita.
3. Para uma partícula em órbita circular em torno de um centro de força gravitacional, demonstre que: (a) A energia total da partícula é a metade da energia potencial associada à órbita. (b) A velocidade da partícula é inversamente proporcional à raiz quadrada do raio da órbita.
4. Considere um satélite em órbita circular próxima da superfície de um planeta de raio  $R_p$ , onde a aceleração da gravidade vale  $g_p$ . (a) Calcule a velocidade de escape do satélite partindo dessa órbita. (b) Aplique o resultado à Terra, desprezando os efeitos da atmosfera.

5. O diâmetro angular aparente do Sol visto da Terra (ângulo subtendido pelo disco solar) é de  $0,55^\circ$ . A constante gravitacional é  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ . Utilizando apenas estes dados, juntamente com o período da órbita da Terra em torno do Sol, aproximada por um círculo, calcule a densidade média  $\mu$  do Sol.
6. Supondo que a atração gravitacional da nossa galáxia, de massa total  $M_g$  e raio  $R_g$ , atua como se toda a massa estivesse concentrada no seu centro, e comparando a órbita circular de uma estrela situada na beirada da galáxia, de velocidade  $v_g$ , com a órbita da Terra em torno do Sol, de raio médio  $R$ , mostre que

$$M_g / M_s = (R_g v_g^2) / (R v^2)$$

onde  $m_s$  é a massa do Sol e  $v$  é a velocidade orbital da Terra em torno do Sol. Sabendo que a velocidade orbital do Sistema Solar em torno do centro da galáxia é de aproximadamente 200 km/s [Seç. 10.8 (e)] e que a distância dele ao centro é de aproximadamente  $(3/5) R_g$ , (a) Estime  $v_g$  usando o resultado (b) do Problema 3; (b) Estime  $M_g/M_s$ , sabendo que  $R_g \sim 5 \times 10^4$  anos-luz.

7. Em 1795, Pierre-Simon de Laplace antecipou a existência de buracos negros, afirmando: "Uma estrela luminosa de mesma densidade que a Terra, cujo diâmetro fosse 250 vezes maior que o do Sol, não permitiria, em consequência de sua atração, que os seus raios luminosos nos atingissem; é possível, portanto, que os maiores corpos luminosos existentes no Universo sejam invisíveis para nós." Embora este raciocínio não-relativístico não se justifique, deduza o resultado de Laplace. Para isto, calcule a velocidade de escape a partir de uma estrela hipotética de mesma densidade que a Terra em função do seu diâmetro e ache o valor crítico do diâmetro.
8. Considere um sistema de três partículas de mesma massa  $m$ , ocupando os vértices de um triângulo equilátero de lado  $d$ . (a) Calcule a força gravitacional que atua sobre cada partícula, em módulo, direção e sentido. (b) Mostre que as três partículas mantêm essa configuração triangular descrevendo órbitas circulares em torno do CM do sistema com velocidade angular  $\omega$ ; calcule o valor de  $\omega$ . Este caso particular solúvel do problema de três corpos foi considerado por Laplace.
9. Considere uma estrela binária cujos componentes, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , separadas por uma distância  $r$ , descrevem órbitas circulares de período  $T$  em torno do CM do par (Seç. 10.10). Seja  $T_s$  o período da órbita da Terra, de raio médio  $R$ , em torno do Sol, de massa  $M_s$ . (a) Mostre que

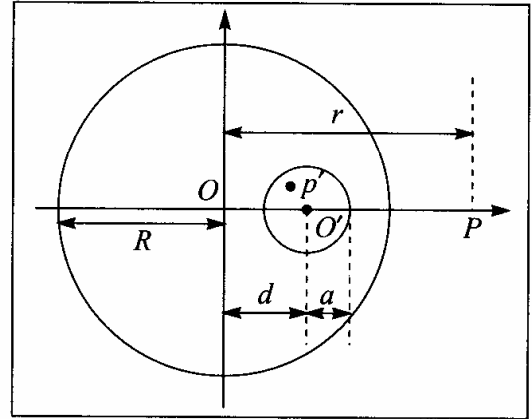
$$(T / T_s)^2 = [M_s / (m_1 + m_2)] \times (r / R)^3$$

(b) Aplique este resultado para calcular o período da estrela dupla Sirius A - Sirius B [Seç. 10.8 (e)], sabendo que a massa de Sirius A é  $2,2 M_s$  e a de Sirius B é  $0,9 M_s$ . A separação do par é de 19,9 U.A.; despreze a excentricidade das órbitas. (c) Calcule os raios  $r_A$  e  $r_B$  das órbitas de Sirius A e Sirius B.

10. Duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  são soltas em repouso, separadas de uma distância inicial  $r_0$ , movendo-se apenas sob o efeito de sua atração gravitacional mútua. Calcule as velocidades das duas partículas quando se aproximam até uma distância  $r (< r_0)$  uma da outra.
11. Calcule, em kgf, a força de atração gravitacional entre duas esferas idênticas de chumbo de raio igual a 50 cm, encostadas uma na outra. A densidade do chumbo é de  $11,3 \text{ g/cm}^3$ .
12. Calcule o período de oscilação de uma partícula no túnel hipotético através do centro da Terra considerado na Seç. 10.9 (c). Com que velocidade a partícula passaria pelo centro da Terra? Compare os resultados com os do Problema 2.

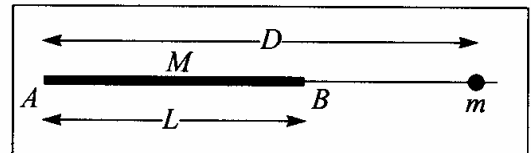
13. Calcule o campo gravitacional (força por unidade de massa) produzido por uma camada esférica homogênea de densidade  $\rho$ , raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , num ponto situado dentro da camada, à distância  $r$  do centro ( $a \leq r \leq b$ ). Mostre que, para uma camada delgada, o campo varia linearmente (com boa aproximação) entre as superfícies interna e externa (cf. figura 10.31).

14. Dentro de uma esfera de raio  $R$  e de densidade  $\rho$  existe uma cavidade esférica de raio  $a$ . A distância entre os centros  $O$  e  $O'$  da esfera e da cavidade é  $d$  (figura). (a) Para um ponto  $P$  externo, alinhado com os centros  $O$  e  $O'$  e à distância  $r$  de  $O$ , calcule a razão entre o campo gravitacional (força por unidade de massa) da esfera com a cavidade e aquele que existiria se a esfera fosse maciça (sem cavidade). (b) Calcule o campo gravitacional (em módulo, direção e sentido) num ponto  $P'$  qualquer situado dentro da cavidade. Sugestão: Procure construir os campos superpondo duas situações.



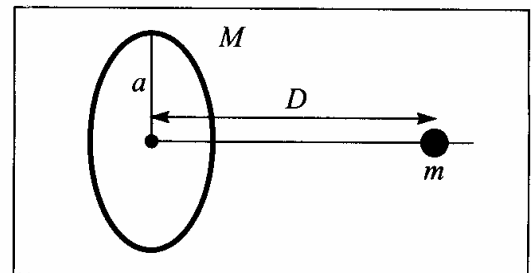
15. Calcule a energia potencial gravitacional total (Seç. 10.11) associada a uma esfera homogênea de raio  $R$  e massa  $M$ . Sugestão: Imagine a esfera como sendo construída por agregação de camadas sucessivas, como cascas de cebola. Considere a variação de energia potencial quando uma camada de espessura  $dr$  infinitésima é agregada a uma esfera de raio  $r$ , e integre sobre  $r$ .

16. Considere um fio retilíneo homogêneo de massa  $M$  e comprimento  $L$  e uma partícula de massa  $m$  alinhada com o fio, à distância  $D$  de uma extremidade (Fig.). Mostre que a força de atração gravitacional exercida pelo fio sobre a partícula é a mesma que se teria se a massa total do fio estivesse concentrada num único ponto, à distância  $d$  da massa  $m$ , onde  $d = \sqrt{D(D-L)}$  é a média geométrica das distâncias de  $m$  às extremidades A e B do fio.



$$\text{Nota: } \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

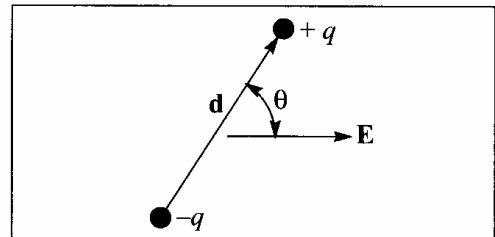
17. Um fio homogêneo de massa  $M$  tem a forma de um anel circular de raio  $a$ . Calcule a força de atração gravitacional exercida pelo fio sobre uma partícula de massa  $m$  situada sobre o eixo (perpendicular ao plano do anel que passa pelo seu centro), à distância  $D$  do centro do anel (Fig.).



## PROBLEMAS DO CAPÍTULO 11

1. Seja  $C$  uma curva plana fechada orientada. A *área orientada*  $S$  associada a  $C$  é definida como um vetor perpendicular ao plano de  $C$ , de magnitude igual à área  $S$  contida dentro de  $C$  e sentido tal que, vista da extremidade de  $S$ ,  $C$  é descrita em sentido anti-horário (a) Interprete  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  em termos de  $S$ . (b) Demonstre que, se orientarmos os contornos das quatro faces de um tetraedro de tal forma que o sentido de  $S$  para cada face seja sempre o da normal externa (apontando para fora do tetraedro), a resultante das áreas orientadas associadas às quatro faces é nula.

2. Um dipolo elétrico é um par de cargas iguais e opostas,  $+q$  e  $-q$ , separadas por uma distância  $d$ . O *momento de dipolo elétrico*  $\mathbf{p}$  associado ao dipolo é o vetor  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  onde  $|\mathbf{d}| = d$  e  $\mathbf{d}$  aponta de  $-q$  para  $+q$  (Fig.). Considere um dipolo elétrico situado num campo elétrico  $\mathbf{E}$  uniforme.



- (a) Mostre que a resultante das forças elétricas aplicadas ao dipolo é nula, mas que o torque resultante é dado por  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$  (em relação a qualquer ponto).
- (b) Mostre que a energia potencial do dipolo no campo (Seç. 7.5) é dada por  $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ . Identifique as situações de equilíbrio estável e instável do dipolo no campo.
3. Considere um sistema isolado de duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ . Exprima o vetor momento angular total do sistema relativo ao seu CM em função da massa reduzida  $\mu$ , do vetor de posição  $\mathbf{r}$  de  $m_2$  em relação a  $m_1$  e da velocidade relativa  $\mathbf{v}$  de  $m_2$  em relação a  $m_1$ .
4. Dois patinadores de massa 60 kg, deslizando sobre uma pista de gelo com atrito desprezível, aproximam-se um do outro com velocidades iguais e opostas de 5m/s, segundo retas paralelas, separadas por uma distância de 1,40m (a) Calcule o vetor momento angular do sistema e mostre que é o mesmo em relação a qualquer ponto e se conserva (b) Quando os patinadores chegam a 1,40m um do outro, estendem os braços e dão-se as mãos, passando a girar em torno do CM comum. Calcule a velocidade angular de rotação.
5. No modelo de Bohr do átomo de hidrogênio, o elétron, de carga  $-e$  ( $e = 1,60 \times 10^{-19}$  C) e massa  $m = 9,11 \times 10^{-31}$  kg, descreve órbitas circulares em torno do próton, de carga  $e$  e massa  $1.840 m$ . Com muito boa aproximação, podemos tratar o próton como um centro de forças fixo, identificado com o CM do sistema. A única força que atua é a atração coulombiana. A hipótese básica de Bohr foi que a magnitude  $l$  do momento angular do elétron não pode assumir valores arbitrários, mas tão somente os valores "quantizados"
- $$l_n = n\hbar (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{onde} \quad \hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$
- (a) Calcule o raio de Bohr  $r_1$  da órbita com  $n = 1$ , e expresse o raio  $r_n$  da órbita associada com  $l_n$  em função de  $r_1$ . (b) Calcule, em eV, a energia  $E_1$  da órbita com  $n = 1$ , e expresse  $E_n$  em função de  $E_1$ . (c) Calcule a razão  $v_1/c$  da velocidade do elétron na órbita com  $n = 1$  para a velocidade da luz  $c$ .

6. Considere o movimento de uma partícula de massa  $m$  num campo de forças centrais associado à energia potencial  $U(r)$ , onde  $r$  é a distância da partícula ao centro de forças  $O$ . Neste movimento, a magnitude  $l = ||\mathbf{l}||$  do momento angular da partícula em relação a  $O$  se conserva (Seç. 11.4). Sejam  $(r, \theta)$  as componentes em coordenadas polares do vetor de posição  $\mathbf{r}$  da partícula em relação à origem  $O$ . (a) Mostre que as componentes em coordenadas polares do vetor velocidade  $\mathbf{v}$  da partícula são  $v_r = dr/dt$ , a velocidade radial, e  $v_\theta = r d\theta/dt$ , a componente transversal da velocidade. Mostre que  $l = m r v_\theta$ . (b) Mostre que a energia total  $E$  da partícula é dada por

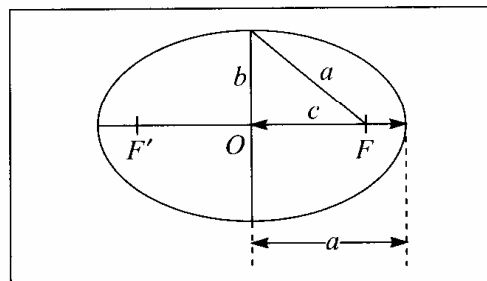
$$E = \frac{1}{2} m v_r^2 + V_{ef}(r)$$

onde 
$$V_{ef}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

chama-se o *potencial efetivo* para movimento na direção radial ( $0 < r < \infty$ ). O termo  $l^2/(2m r^2)$  associado à energia cinética de rotação da partícula em torno do centro, é chamado de “potencial centrífugo”. Como  $E$  e  $l$  se conservam, o problema se reduz ao do “movimento unidimensional” na direção radial, na presença do potencial efetivo  $V_{ef}(r)$ . (c) Esboce o gráfico de  $V_{ef}(r)$  quando  $U(r)$  corresponde à atração gravitacional entre a partícula de massa  $m$  e outra de massa  $M \gg m$ , que pode ser tratada como centro de forças fixo em  $O$ .

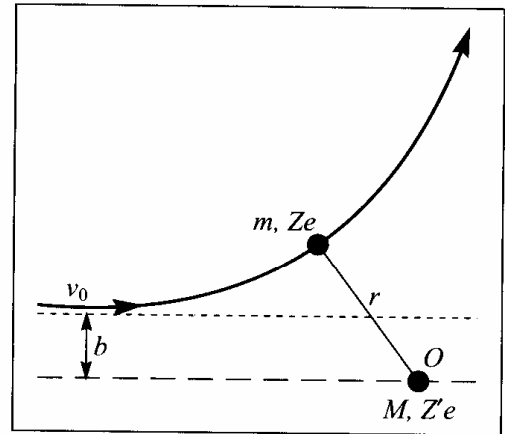
7. Usando os resultados do Problema 6 e por analogia com a discussão do movimento unidimensional com energia  $E$  dada num potencial (Seç. 6.5), (a) Calcule, para o sistema de duas partículas em interação gravitacional do Probl. 6 (c), a distância  $r_0$  associada ao mínimo de  $V_{ef}(r)$  e a energia  $E_0$  correspondente. Mostre que  $r_0$  é o raio da órbita circular da partícula em torno do centro de forças, associada à energia total  $E_0$ . (b) Mostre que, para  $0 > E > E_0$ , a distância  $r$  ao centro de forças oscila entre dois valores  $r_p$  e  $r_a$ . Estes valores correspondem ao periélio e ao afélio da órbita elíptica de energia  $E$ . Calcule o semi-eixo maior  $a$  dessa órbita elíptica e mostre que  $E$  só depende de  $a$  (veja Figs. 10.13 e 10.14). Calcule a velocidade da partícula numa órbita elíptica de semi-eixo maior  $a$ , quando se encontra à distância  $r$  do centro de forças. (d) Calcule a excentricidade  $e$  da órbita (pg. 194) em função de  $a$ ,  $E$  e do momento angular  $l$ .

8. Pela geometria da elipse (veja a Fig.), os semi-eixos maior  $a$  e menor  $b$  e a semi-distância focal  $c$  estão relacionados por:  $a^2 = b^2 + c^2$ , e a área da elipse é  $\pi a b$ . (a) Exprima o momento angular  $l$  de um planeta numa órbita elíptica em torno do Sol em função da área  $A$  e do período  $T$  da órbita, usando a 2ª lei de Kepler. (b) Identificando a expressão de  $l$  obtida em (a) com a relação entre  $l$ ,  $a$  e a excentricidade da órbita obtida no Probl. 7, demonstre a 3ª lei de Kepler sob a forma:

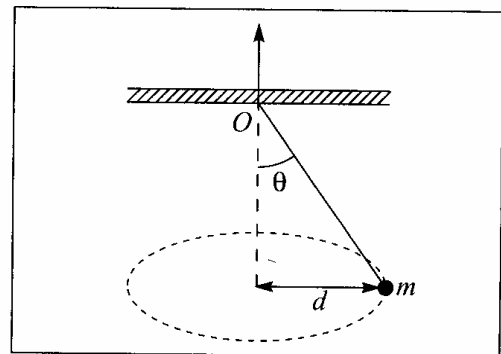


$T^2/a^3 = 4\pi^2 / (GM_s)$ , onde  $M_s$  é a massa do Sol. (c) O periélio e o afélio de Mercúrio são, respectivamente, de  $4,59 \times 10^7$  km e  $6,97 \times 10^7$  km, e a massa do Sol é  $M_s \approx 1,99 \times 10^{30}$  kg. Calcule o período da órbita de Mercúrio.

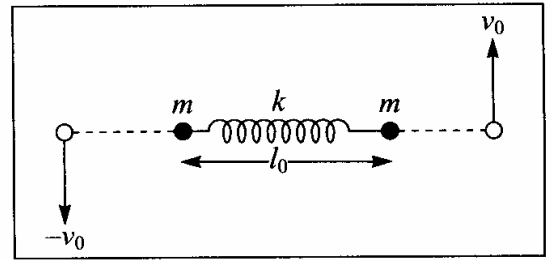
9. O espalhamento Rutherford é a deflexão de uma partícula carregada (massa  $m$ , carga  $Ze$ ) por outra (massa  $M$ , carga  $Z'e$ ), sob ação da força coulombiana. Supomos  $M \gg m$ , de modo que a partícula de massa  $M$  pode ser tratada como um centro de forças fixo. Para  $Z$  e  $Z'$  de mesmo sinal (ex.: partículas alfa defletidas por um núcleo) e sendo a partícula de massa  $m$  lançada a partir de uma grande distância da outra, com velocidade inicial  $v_0$  e parâmetro de choque  $b$  (Seç. 9.6), a órbita de  $m$  é uma hipérbole do tipo ilustrado na Fig. ao lado. (a) Escreva o potencial efetivo  $V_{ef}(r)$  (cf. Probl. 6) em função de  $b$  e  $v_0$ . (b) Calcule a distância  $r_0$  de máxima aproximação entre as duas partículas, como função de  $b$  e  $v_0$ .



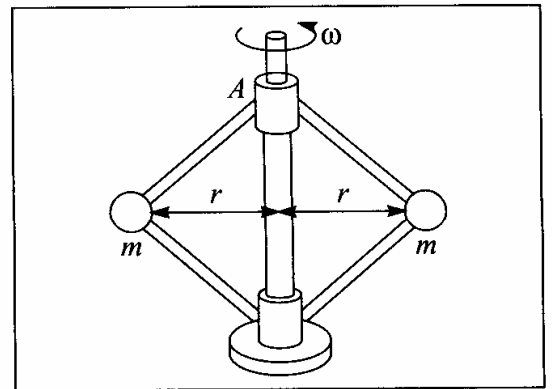
10. Uma partícula de massa  $m$  move-se num campo de forças centrais repulsivo; a força sobre a partícula à distância  $r$  do centro tem magnitude  $F(r) = mA^2/r^3$  onde  $A$  é uma constante. A partícula aproxima-se do centro vindo de uma grande distância, com parâmetro de choque  $b$  e velocidade de magnitude  $v_0$ . (a) Escreva o potencial efetivo  $V_{ef}(r)$  em função de  $b$  e  $v_0$ . (b) Calcule a distância  $r_0$  de maior aproximação entre a partícula e o centro de forças como função de  $b$  e  $v_0$ .
11. Um automóvel de massa  $M$  percorre, em sentido anti-horário, uma pista circular horizontal de raio  $R$ , com velocidade escalar  $v$  constante. Conforme será visto no Cap. 12, o momento angular de uma das rodas do carro em relação ao centro de massa da roda é dado por  $L' = I\omega$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular da roda e  $I$  é o seu momento de inércia em relação ao  $CM$ , que identificamos com o centro da roda. Determine, em módulo, direção e sentido, os vetores momento angular interno, momento angular externo (orbital) e momento angular total da roda em função de  $M$ ,  $R$ ,  $v$ ,  $I$  e do raio  $a$  da roda.
12. Uma bolinha presa a um fio de massa desprezível gira em torno de um eixo vertical com velocidade escalar constante, mantendo-se a uma distância  $d = 0,5$  m do eixo; o ângulo  $\theta$  é igual a  $30^\circ$  (veja Fig.). O fio passa sem atrito através de um orifício  $O$  numa placa, e é puxado lentamente para cima até que o ângulo  $\theta$  passa a  $60^\circ$ . (a) Que comprimento do fio foi puxado? (b) De que fator variou a velocidade de rotação?



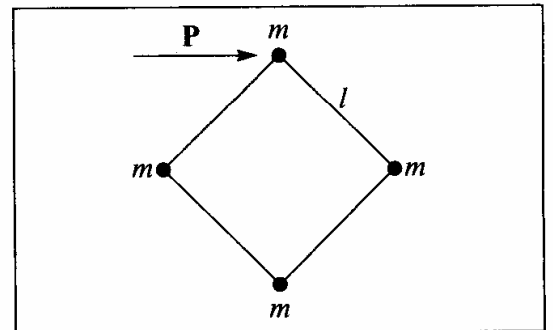
13. Duas partículas de mesma massa  $m$  estão presas às extremidades de uma mola de massa desprezível, inicialmente com seu comprimento relaxado  $l_0$ . A mola é esticada até o dobro desse comprimento e é solta depois de se comunicar velocidades iguais e opostas ( $v_0, -v_0$ ) às partículas, perpendiculares à direção da mola (veja Fig.), tais que  $kl_0^2 = 6mv_0^2$ , onde  $k$  é a constante da mola. Calcule as componentes ( $v_r, v_\theta$ ) radial e transversal da velocidade das partículas quando a mola volta a passar pelo seu comprimento relaxado.



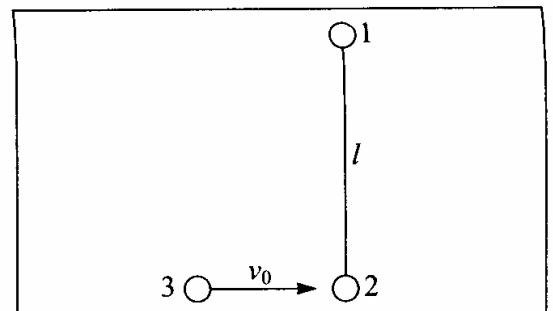
14. No sistema da figura, análogo a um regulador centrífugo (Seç 5.3), o anel A, de massa desprezível, pode deslizar ao longo do eixo vertical. Inicialmente as duas bolas iguais de massa  $m = 200$  g estão a uma distância  $r = 15$  cm do eixo e o sistema gira com velocidade angular  $\omega = 6$  rad/s. Pressiona-se para baixo o anel A, até que a distância das bolas ao eixo aumenta para  $r = 25$  cm. (a) Qual é a nova velocidade angular de rotação? (b) Qual é o trabalho realizado sobre o sistema?



15. Quatro discos iguais de massa  $m$  ocupam os vértices de uma armação quadrada, formada por quatro barras rígidas de comprimento  $l$  e massa desprezível. O conjunto está sobre uma mesa de ar horizontal, podendo deslocar-se sobre ela com atrito desprezível. Transmite-se um impulso instantâneo  $P$  a uma das massas, na direção de uma das diagonais do quadrado (Fig.). Descreva completamente o movimento subsequente do sistema.



16. Um haltere formado por dois discos 1 e 2 iguais, de massa  $m$ , unidos por uma barra rígida de massa desprezível e comprimento  $l = 30$  cm, repousa sobre uma mesa de ar horizontal. Um terceiro disco 3 de mesma massa  $m$  desloca-se com atrito desprezível e velocidade  $v_0 = 3$  m/s sobre a mesa, perpendicularmente ao haltere, e colide frontalmente com o disco 2, ficando colado a ele (Fig.). Descreva completamente o movimento subsequente do sistema.





# Capítulo 12

## DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS

### 12.1 — Rotação em torno de um eixo fixo

Vimos no capítulo precedente que o movimento de rotação mais simples de um corpo rígido é a rotação em torno de um eixo fixo. É conveniente portanto iniciarmos por ele o estudo da dinâmica de corpos rígidos. Conforme vimos, o problema se reduz ao do movimento circular de uma partícula  $P$  do corpo em torno do eixo, numa secção transversal.

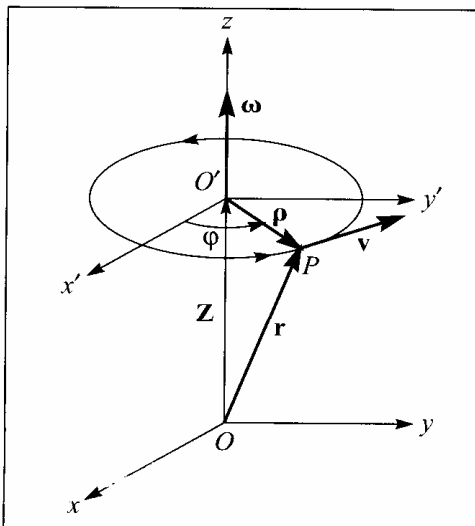


Figura 12.1 Rotação em torno do eixo  $Oz$ .

Vamos tomar o eixo fixo  $OO'$  como eixo dos  $z$ , com origem num ponto  $O$  do mesmo (Fig. 12.1) e considerar um ponto  $P$  num plano  $O'x'y'$  (secção transversal).

O único grau de liberdade é descrito pelo ângulo de rotação  $\phi$  do ponto  $P$  em torno de  $Oz$ ; a velocidade de rotação  $\mathbf{v}$  desse ponto é tangente ao círculo, ou seja, é perpendicular ao raio vetor  $O'P = \boldsymbol{\rho}$  no plano  $O'x'y'$  (Fig. 12.1), e sua magnitude é

$$v = \rho \dot{\phi}, \quad \rho = |\boldsymbol{\rho}| \quad (12.1.1)$$

O momento angular de uma partícula de massa  $m$  no ponto  $P$  em relação à origem fixa  $O$  é

$$\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (12.1.2)$$

onde (Fig. 12.1)  $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OO}' + \mathbf{O}'P$ , ou seja

$$\mathbf{r} = \mathbf{Z} + \boldsymbol{\rho} \quad (12.1.3)$$

Temos então

$$\mathbf{l} = m(\mathbf{Z} + \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{v} = m\mathbf{Z} \times \mathbf{v} + m\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}$$

O produto vetorial  $\mathbf{Z} \times \mathbf{v}$  é perpendicular a  $\mathbf{Z}$ , ou seja, ao eixo  $Oz$ , ao passo que  $\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}$  é paralelo a  $Oz$ . Para aplicar a equação fundamental da dinâmica das rotações (11.5.16) a este problema, só nos interessa, conforme veremos, a *componente do momento angular ao longo do eixo de rotação* (componente  $l_z$ ), dada pelo último termo  $m\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}$ . Como  $\boldsymbol{\rho}$  é perpendicular a  $\mathbf{v}$ , obtemos finalmente, com o auxílio da (12.1.1),

$$l_z = m\rho v = m\rho^2 \dot{\phi} = m\rho^2 \omega$$

onde  $\omega = \dot{\phi}$  é a velocidade angular de rotação.

Podemos comparar este resultado com as (11.4.11) e (11.4.12): vemos que  $m\rho^2$  é o momento

$$F_{1y} + F_{2y} - P = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{1y} = P - F_{2y} = \frac{P}{2} \end{array} \right. \quad (12.8.8)$$

$$F_{1x} + F_{2x} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{1x} = -F_{2x} = -\frac{P}{2} \cotg \alpha \end{array} \right. \quad (12.8.9)$$

pois  $F_{2x}/F_{2y} = \cotg \alpha$ . As (12.8.7) a (12.8.9) determinam todas as componentes de  $F_1$  e  $F_2$ .

A solução mostra que a linha de ação de  $F_1$  aponta para o ponto  $D$ , intersecção com o fio da linha de ação da força-peso  $P$  ( $F_1$  também forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal). Poderíamos ter previsto este resultado, pois  $F_1$ ,  $F_2$  e  $P$  são vetores deslizantes e devem ter resultante nula, formando portanto um "polígono de forças" fechado; no caso, é um triângulo isósceles, indicado em linha interrompida, com origem em  $G$ , na figura 12.49. O problema poderia ter sido resolvido graficamente, a partir destas considerações.

- 2) Consideremos um corpo pesado que se sustenta num plano horizontal, sobre vários pontos de apoio (como uma mesa). As reações nos pontos de apoio são todas verticais. É fácil ver, compondo-as duas a duas (pg. anterior), que a resultante  $R$  dessas forças paralelas está aplicada num ponto  $O$  interno ao "polígono de sustentação" cujos vértices são os pontos de apoio (Fig. 12.50). Como  $R$  tem de equilibrar a força-peso, aplicada no centro de gravidade, a condição de equilíbrio é que a linha da ação da força-peso (vertical pelo centro de gravidade) passe por dentro do polígono de sustentação.

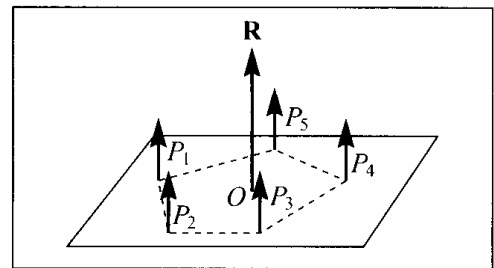


Figura 12.50 Polígono de sustentação.

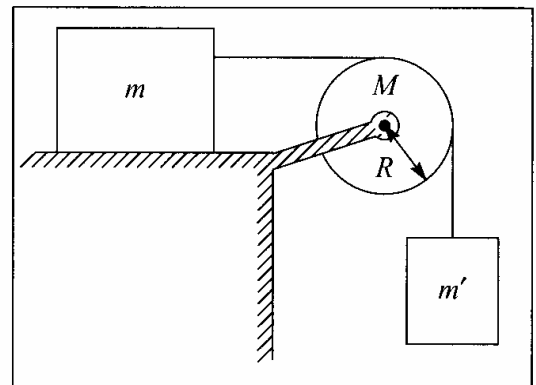
Se quisermos determinar as reações nos pontos de apoio, isto é fácil para 3 pontos de apoio, porque as (12.8.3) dão 3 equações escalares (verifique!), mas o problema se torna indeterminado para mais de 3 pontos de apoio, porque o número de incógnitas é superior ao número de equações (sabemos que bastam 3 pés para sustentar uma mesa). Analogamente, se o mastro do exemplo 1 for cimentado à parede no ponto  $A$ , o que permitiria sustentá-lo sem o auxílio do fio, torna-se impossível determinar a tração no fio a partir das equações de equilíbrio de um corpo rígido.

Problemas deste tipo chamam-se "estaticamente indeterminados", e a razão das dificuldades é a hipótese idealizada de que se trata de corpos rígidos. Na realidade, as reações são determinadas pelas deformações elásticas que se produzem nos pontos de apoio, e seria preciso conhecer as propriedades elásticas dos materiais para obter as forças de reação produzidas.

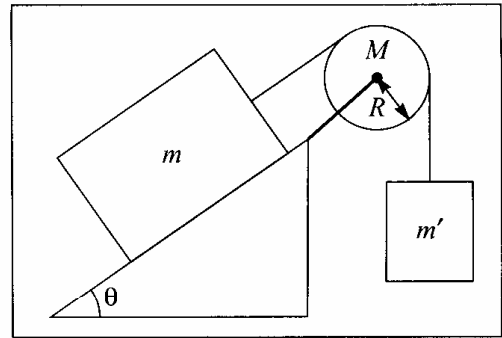
### PROBLEMAS DO CAPÍTULO 12

1. Demonstre o seguinte teorema dos eixos perpendiculares: O momento de inércia de uma placa (lâmina delgada) plana de forma arbitrária em relação a um eixo  $Oz$  perpendicular a seu plano, com a origem  $O$  no plano da placa, é a soma dos momentos de inércia da placa em relação aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , que formam com  $Oz$  um sistema de eixos ortogonais.

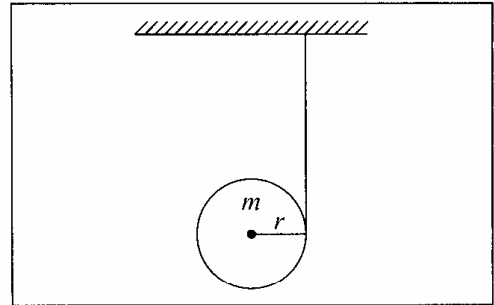
2. Como aplicação do teorema dos eixos perpendiculares (Probl.1), calcule: (a) O momento de inércia de uma placa retangular homogênea de massa  $M$  e lados  $a$  e  $b$  em relação a um eixo perpendicular a seu plano, que passa pelo centro da placa. (b) O momento de inércia de um disco circular de massa  $M$  e raio  $R$ , em torno de qualquer um seus diâmetros.
3. Calcule o momento do inércia de uma lâmina homogênea de massa  $M$  em forma de anel circular, de raio interno  $r_1$  e raio externo  $r_2$ , (a) Em relação a um eixo perpendicular ao plano do anel, passando pelo seu centro. (b) Em relação a um diâmetro do anel. Verifique o resultado, nos casos limites de um disco e de um aro circular.
4. Calcule o momento de inércia de um cubo homogêneo de massa  $M$  e aresta  $a$ , em relação a um diâmetro (eixo que passa pelos centros de duas faces opostas).
5. Calcule o momento de inércia de um cone circular reto homogêneo, de massa  $M$  e raio da base  $R$ , em relação ao eixo do cone. Sugestão: Considere o cone como uma pilha de discos circulares de alturas infinitésimas e raios decrescentes.
6. Uma porta de 15 kg e 70 cm de largura, suspensa por dobradiças bem azeitadas, está aberta de  $90^\circ$ , ou seja, com seu plano perpendicular ao plano do batente. Ela leva um empurrão na beirada aberta, com impacto equivalente ao de uma massa de 1 kg, com velocidade de 2,5 m/s. Quanto tempo ela leva para fechar-se?
7. Uma mesa de coquetel tem um tampo giratório, que é uma tábua circular de raio  $R$  e massa  $M$ , capaz de girar com atrito desprezível em torno do eixo vertical da mesa. Uma bala de massa  $m \ll M$  e velocidade  $v$ , disparada por um convidado que abusou dos coquetéis, numa direção horizontal, vai-se encravar na periferia da tábua. (a) Qual é a velocidade angular de rotação adquirida pela tábua? (b) Que fração da energia cinética inicial é perdida no impacto?
8. Um alçapão quadrado, de lado  $a$  e massa  $M$ , está levantado verticalmente, em equilíbrio sobre as dobradiças, quando é levado a cair por uma ligeira trepidação. Desprezando o atrito, que velocidade angular terá adquirido ao bater no chão?
9. Calcule o efeito da massa  $M$  da polia, de raio  $R$ , sobre o sistema do Cap. 4, Probl. 12 (fig.): a massa  $m$ , que desliza sem atrito, está ligada à massa suspensa  $m'$  pelo fio que passa sobre a polia. Determine (a) a aceleração  $a$  do sistema; (b) as tensões  $T$  e  $T'$  nos fios ligados a  $m$  e  $m'$ .



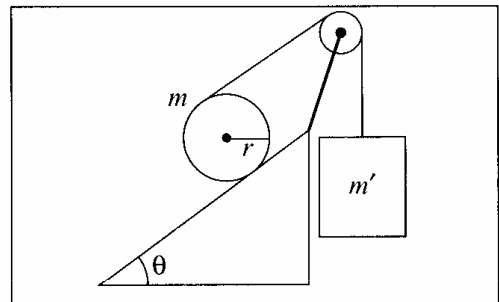
10. Um bloco de massa  $m$ , que pode deslizar com atrito desprezível sobre um plano inclinado de inclinação  $\theta$  em relação à horizontal, está ligado por um fio, que passa sobre uma polia de raio  $R$  e massa  $M$ , a uma massa  $m' > m$  suspensa (Fig.). O sistema é solto em repouso. Calcule, por conservação da energia, a velocidade  $v$  de  $m'$  após cair de uma altura  $h$ .



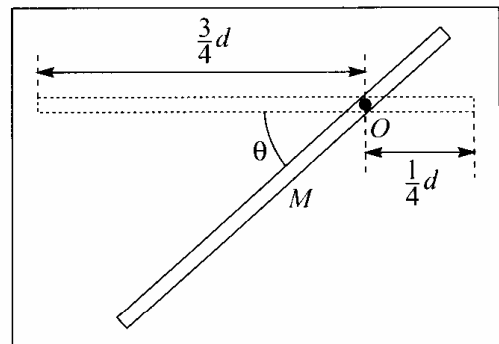
11. Prende-se ao teto a ponta de uma fita métrica leve, enrolada num estojo circular de massa  $m$  e raio  $r$ , e solta-se o estojo em repouso (Fig.). (a) Calcule a aceleração linear do estojo. (b) Calcule a tensão da fita. (c) Calcule a velocidade linear do estojo depois que um comprimento  $s$  da fita se desenrolou. Verifique a conservação da energia.



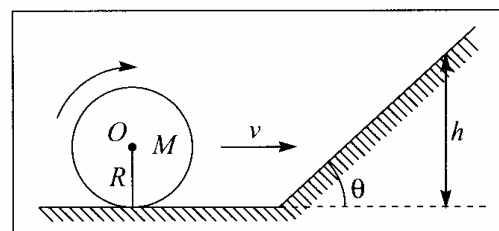
12. Uma fita leve está enrolada em volta de um disco circular de massa  $m$  e raio  $r$ , que rola sem deslizar sobre um plano inclinado áspero de inclinação  $\theta$ . A fita passa por uma roldana fixa de massa desprezível e está presa a um corpo suspenso de massa  $m'$  (Fig.). Calcule (a) a aceleração  $a$  da massa  $m'$  (b) a tensão  $T$  na fita.



13. Uma haste metálica delgada, de comprimento  $d$  e massa  $M$ , pode girar livremente em torno de um eixo horizontal, que a atravessa perpendicularmente, à distância  $d/4$  de uma extremidade. A haste é solta a partir do repouso, na posição horizontal. (a) Calcule o momento de inércia  $I$  da haste, com respeito ao eixo em torno do qual ela gira. (b) Calcule a velocidade angular  $\omega$  adquirida pela haste após (Fig.) ter caído de um ângulo  $\theta$ , bem como a aceleração angular  $\alpha$ .

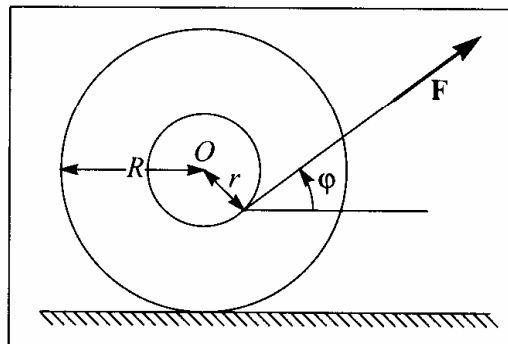


14. Uma roda cilíndrica homogênea, de raio  $R$  e massa  $M$ , rola sem deslizar sobre um plano horizontal, deslocando-se com velocidade  $v$ , e sobe sobre um plano inclinado de inclinação  $\theta$ , continuando a rolar sem deslizamento (Fig.). Até que altura  $h$  o centro da roda subirá sobre o plano inclinado?



15. Uma bola homogênea de raio  $r$  rola sem deslizar desde o topo de um domo hemisférico de raio  $R$ . (a) Depois de percorrer que ângulo  $\theta$  em relação à vertical a bola deixará a superfície? (b) Com que velocidade  $v$  isso acontece?

16. Um ioiô de massa  $M$ , raio interno  $r$ , raio externo  $R$  e momento de inércia  $I_{CM}$  em relação a seu centro de massa, é puxado pelo fio enrolado em seu eixo central, de forma a rolar sem deslizamento sobre uma mesa horizontal, através de uma força  $F$  que faz um ângulo  $\varphi$  com a horizontal (Fig.). (a) Que condição deve ser satisfeita por  $F = |\mathbf{F}|$  para que o ioiô permaneça em contato com a mesa? (b) Calcule a aceleração angular  $\alpha$  do ioiô. (c) Mostre que existe um ângulo crítico  $\varphi_0$  tal que, conforme a magnitude de  $\varphi$  em relação a  $\varphi_0$ , o fio se desenrola ou enrola, e o ioiô avança ou recua. Que acontece para  $\varphi = \varphi_0$ ?

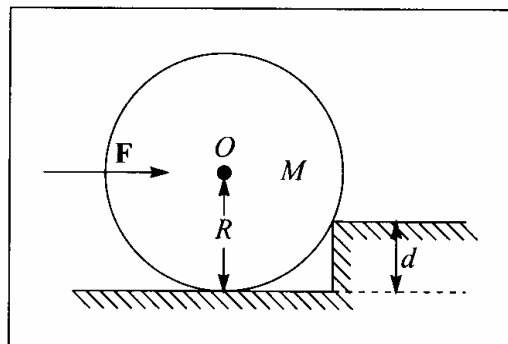


17. Uma bola de boliche esférica uniforme é lançada, com velocidade inicial  $v_0$  horizontal e sem rotação inicial, sobre uma cancha horizontal, com coeficiente de atrito cinético  $\mu_c$ . (a) Que distância  $d$  a bola percorrerá sobre a prancha até que comece a rolar sem deslizar? (b) Quanto tempo  $t$  depois do lançamento isso ocorre? (c) Qual é a velocidade  $v$  da bola nesse instante?

18. Um giroscópio, constituído por um disco de 5 cm de raio, colocado no centro de uma haste de 10 cm de comprimento e massa desprezível, gira em torno do seu eixo a 1.500 rpm. Ele é colocado com seu eixo horizontal e um extremo apoiado num suporte (Fig. da pg. 271) Calcule a velocidade angular de precessão  $\Omega$ , em rpm.

19. Um pião cônico homogêneo de massa  $M$  tem raio da base  $R$  e altura  $h$ . (a) Calcule a posição do centro de massa do pião. (b) Com o auxílio do resultado do probl. 5, calcule a velocidade angular  $\Omega$  de precessão regular do pião quando ele é colocado em rotação rápida, de velocidade angular  $\omega$  em torno do seu eixo, com a ponta apoiada no chão. (c) Se o pião precessiona com seu eixo inclinado de  $\theta$  em relação à vertical, qual é a força horizontal de reação  $F$  exercida sobre seu ponto de apoio? (d) Calcule  $\Omega$  e  $|\mathbf{F}|$  para  $M = 300$  g,  $R = 4$  cm,  $h = 12$  cm,

20. Calcule a magnitude da força  $F$  horizontal que é preciso aplicar, em direção ao eixo  $O$ , para conseguir que um tambor cilíndrico, de massa  $M$  e raio  $R$ , suba um degrau de altura  $d < R$  (Fig.).



21. Uma escada uniforme, de comprimento  $l$  e massa  $M$ , apoiada sobre o chão, com coeficiente de atrito estático  $\mu_e$ , está encostada a uma parede lisa (atrito desprezível), formando um ângulo  $\theta$  com a parede. Para que domínio de valores de  $\theta$  a escada não escorrega?
22. Qual é a distância  $d$  máxima que um homem de massa  $m$  pode subir ao longo da escada do Probl. 21, sem que a escada escorregue?
23. Empilham-se  $N$  blocos idênticos, de comprimento  $l$  cada um, sobre uma mesa horizontal. Qual é a distância  $d$  máxima entre as extremidades do último e do primeiro bloco (Fig.) para que a pilha não desabe? *Sugestão:* Considere as condições de equilíbrio, sucessivamente, de cima para baixo. Faça a experiência! (use blocos de madeira, livros, tijolos, dominós, ... idênticos).

