SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS

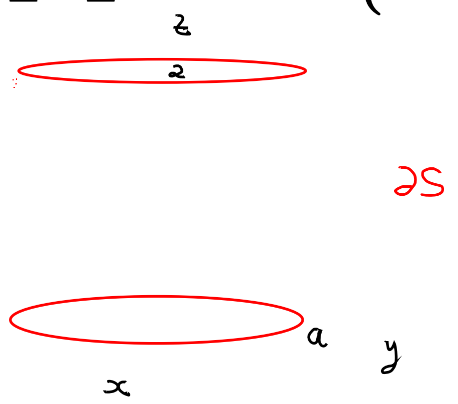
1. Bordo de superfície

Intuitivamente, o **bordo** de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, denotado por ∂S é formado pelas curvas que "limitam a superfície".

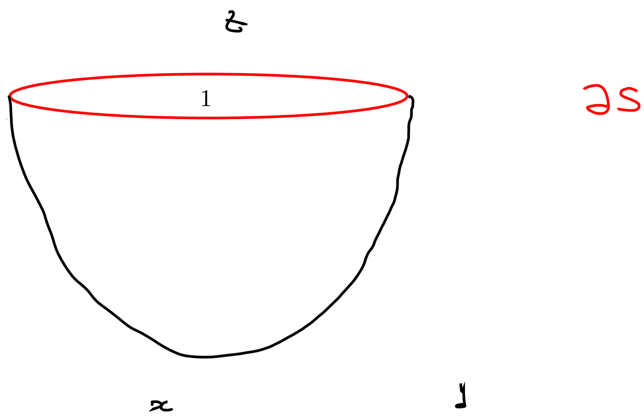
Exemplos 1.1.

(1) *S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ entre os planos $z = 0$ e $z = 2$. O bordo de S é a união das curvas $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ e $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 2$ que podem ser parametrizadas, por exemplo, por*

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \ \operatorname{sen} t \\ z = 0, \ \ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \qquad \gamma_2 = \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \ \operatorname{sen} t \\ z = 2, \ \ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

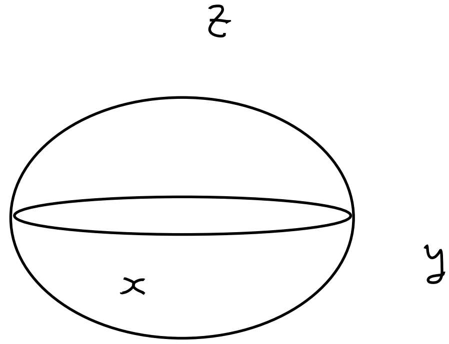


(2) *S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$, entre os planos $0 \leq z \leq 4$. O bordo de S é a curva $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4$.*



Date: December 10, 2023.

(3) *S é a esfera de raio $a > 0$, $x^2 + y^2 + a = a^2$. O bordo de S é o conjunto vazio (dizemos, nesse caso, que S é uma* ***superfície fechada****).*



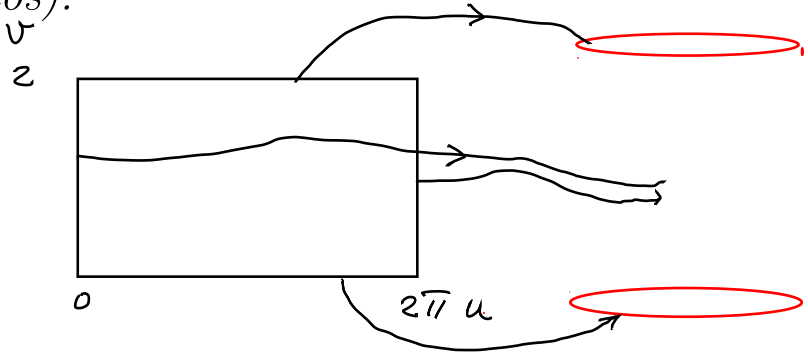
De maneira um pouco mais formal, podemos definir o bordo de uma superfície parametrizada regular $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. como a parte da imagem por Γ do bordo de S **que é percorrida uma única vez**.

Exemplo 1.2. *O cilindro do exemplo 1 acima pode ser parametrizado por*

$$\Gamma = \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\ \mathrm{sen}\, u \\ z = v,\ \ 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 2. \end{cases}$$

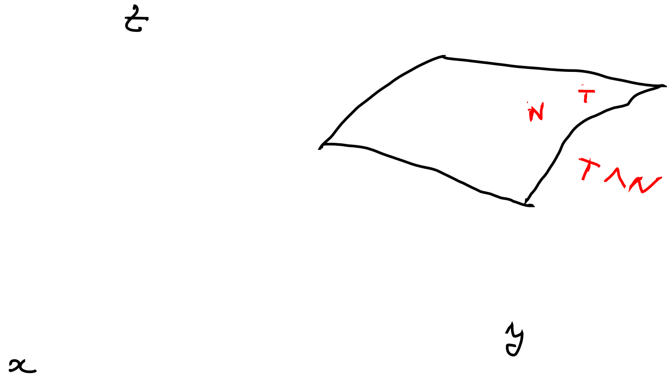
O domínio U de Γ, nesse caso é o retângulo cujo bordo é a união dos segmentos $I_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 2\pi,\ v = 0\}$, $I_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 2\pi,\ v = 2\}$, $I_3 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u = 0,\ 0 \le v \le 2\}$, $I_3 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u = 2\pi,\ 0 \le v \le 2\}$.

O bordo de Γ é a imagem dos segmentos I_1 e I_2. A imagem de I_3 e I_4 é o mesmo segmento no espaço, percorrido duas vezes (em sentidos opostos).



Suponhamos que $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tem orientação dada pelo vetor normal unitário $\vec{N}$. A orientação determinada pela campo de vetores $\vec{T}(p)$ em $\partial\Gamma$ é denominada **orientação induzida por** $\vec{N}$ se o produto vetorial $\vec{T}(p) \wedge \vec{N}(p)$ aponta para fora da superfície em cada ponto $p \in \partial\Gamma$.

Observação 1.3. *Se o bordo de U tem a orientação induzida por U então a curva $\Gamma(\partial U)$ terá a orientação induzida por $\vec{N}$ se e somente se $\vec{N}$ e $\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v$ apontarem no mesmo sentido.*



Teorema 1.4. *Seja $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada lisa ,orientada pelo campo de vetores normal unitário $\vec{N}$ e $\vec{F}(x, y, z)$ um campo vetorial contínuo definido em um domínio contendo a imagem de $Im(\Gamma) = \Gamma(U)$. Se o bordo de Γ tem a orientação induzida por $\vec{N}$ então vale a igualdade:*

$$\int_{\partial\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint_{\Gamma} \vec{rot}\ \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\, S.$$

Exemplo 1.5. *Calcular $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{dr}$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ e S a parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, acima do plano xOy.*