MAT0220 - Lista 2

1) Determine a série de potências em torno de $z_0 = 0$ das seguintes funções:

(a) $\frac{1}{(1-z)^2}$

(b) $\frac{1}{(1-z)^3}$

(c) $\cos z \cosh z$.

2) Seja $(f_n)_{n\geq 0}$ a sequência de Fibonacci, i.e., $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e, para todo $n \geq 0$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Além disso, seja $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$.

(a) Prove que, no interior da região de convergência da série acima, f satisfaz a seguinte equação:
$$f(z) = z + zf(z) + z^2 f(z).$$

(b) Use o item anterior para encontrar uma fórmula fechada para f_n.

3) Determine a natureza das singularidades isoladas das seguinte funções (indicando a ordem, caso seja um polo):

(a) $\frac{z+1}{z^2-2z}$

(b) $\operatorname{tgh} z$

(c) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$

(d) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

(e) $\frac{z}{\cos z}$

(f) $\frac{e^z}{z^2+\pi^2}$.

4) Calcule os resíduos das funções a seguir em cada uma de suas singularidades isoladas:

(a) $z\cos(1/z)$

(b) $\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}$

(c) $\frac{1}{z^3(z+4)}$.

5) Seja f uma função analítica em um domínio D e z_0 a única raiz de f em D. Se C é uma curva fechada percorrida positivamente tal que z_0 está em seu interior, prove que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = m,$$

onde m é a ordem da raiz z_0.

6) (a) Seja z_0 uma singularidade removível das funções f e g. É verdade que z_0 é uma singularidade isolada da função fg? Em caso afirmativo, é possível determinar sua natureza (e ordem, caso seja polo)?

(b) Seja z_0 um polo de ordem m da função f e um polo de ordem n da função g. É verdade que z_0 é uma singularidade isolada da função fg? Em caso afirmativo, é possível determinar sua natureza (e ordem, caso seja polo)?

7) Calcule

(a) $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$

(b) $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)\,dx}{x^2+1}$, onde $a > 0$

(c) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+k\cos(\theta)}$, onde $-1 < k < 1$.