Física 1 – Ciências Moleculares

Caetano R. Miranda

crmiranda@usp.br

AULA 25 – 06/12/2023

Conservação do Momento

Colisões

Sugestão a ser implementada

DATA	aula n°	Segundas (14:00h - 15:45h) - Sala Turma 33	DATA	aula n°	Quartas (14:00h - 15:45h) - Sala Turma 33	DATA	aula n°	Quintas (14:00h - 15:45h) - Sala Turma 33	
21/08	1	Apresentação do Curso	23/08	2	Experimentação 1 - Escalas	24/08	3	Escalas	
28/08	4	Experimentação 2 - Mov. em 1 D	30/08	5	Mov. em 1D	31/08	6	Mov. em 1D	
04/09			06/08			07/09		SEMANA TRABALHO	
11/09	7	Mov. em 1D	13/09	8	Mov. em 1D	14/09	9	Experimentação 3 - VR & Projéteis	ENTREGA 1
18/09	10	Mov. em 2D e 3D	20/09	11	Mov. em 2D e 3D	21/09		Paralisação	
25/09		Paralisação	27/09		Paralisação	28/09		Paralisação	
02/10		Paralisação	04/10		Paralisação	05/10		Paralisação	
09/10		Paralisação	11/10		Paralisação	12/10		FERIADO - N. S. Aparecida	
16/10		Paralisação	18/10		Paralisação	19/10		Paralisação	
23/10	12	Discussao - revisao	25/10	13	Mov. em 2D e 3D	26/10	14	Experimentação 4a - Dinâmica & Principia	
30/10	15	Principios da Dinâmica - Leis de Newton	01/11	16	Experimentação 5 - Energia e Trabalho	02/11		FERIADO - FINADOS	
06/11	17	PROVA I	08/11	18	Simetria e Conservação	09/11	19	Simetria e Conservação	ENTREGA 2
13/11	20	Resolução - P1	15/11		FERIADO - Republica	16/11	21	Energia e Trabalho	
20/11		FERIADO - Consciência Negra	22/11	22	Energia e Trabalho II	23/11	23	Energia e Trabalho III	
27/11	24	Resolução - Problemas	29/11	25	Revisão - P2	30/11	26	PROVA II	ENTREGA 3
04/12	27	Resolução P2	06/12	28	Conservação do Movimento	07/12	29	Experimentação 7 - Colisões	
11/12	30	Rotação e Momento Angular	13/12	31	Dinâmica de corpos rígidos (Demo)	14/12	32	Dinâmica de corpos rígidos	
18/12	33	Experimentação 9 - Aprendizado de Máquina	20/12	34	PROVA SUB	21/12		ENTREGA - FINAL - VISTA SUB	ENTREGA 4
		Forças de Interação - Sala Invertida							

Sistema de Duas Partículas

- Partículas interagem entre si: forças de contato
  - Eq. Mov.:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{1(2)} \\ \dfrac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{2(1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_{2(1)}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

Momento total do sistema

$$\boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 = \mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_{2(1)}}$$

Momento total se conserva

- 3ª Lei de Newton: $\mathbf{F}_{1(2)}$ e $\mathbf{F}_{2(1)}$ constituem um par ação e reação, são iguais e contrárias.

- Força de Contato numa colisão: forças internas newtoniana

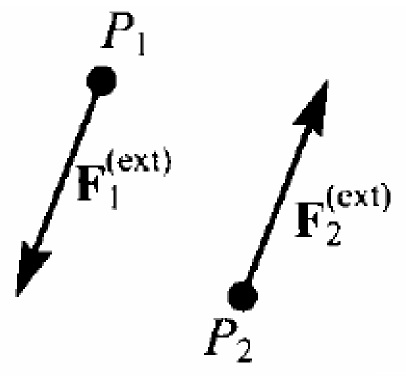
❑ Caso geral: forças internas e forças externas atuando no sistema

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_1^{(ext)} \\ \dfrac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{2(1)} + \mathbf{F}_2^{(ext)} \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_{2(1)} + \mathbf{F}_1^{(ext)} + \mathbf{F}_2^{(ext)}$$

❑ Forças internas newtoniana: $\mathbf{F}_{1(2)} + \mathbf{F}_{2(1)} = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(ext)}}$

$$\mathbf{F}^{(ext)} = \mathbf{F}_1^{(ext)} + \mathbf{F}_2^{(ext)}$$

Resultante das forças externas atuando no sistema



❑ Conservação de Momento:

❑ Não é necessário ser um sistema isolado

❑ Resultante das forças externas aplicadas devem se anular : $\mathbf{F}^{(ext)} = \mathbf{F}_1^{(ext)} + \mathbf{F}_2^{(ext)} = 0$

Eq. Mov. para uma única partícula

$$\boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(ext)}}$$ ⇒

• Tratar o sistema de 2 partículas como se fosse uma só partícula

Sistema de duas partículas com MESMA MASSA

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_1 = m\dfrac{d\mathbf{r}_1}{dt} \\ \mathbf{p}_2 = m\dfrac{d\mathbf{r}_2}{dt} \end{array} \right. \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$$

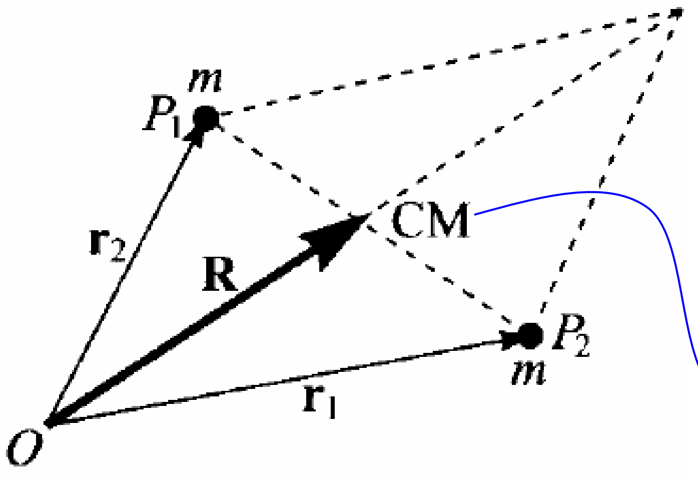
- Representar o movimento do sistema por uma única partícula de massa M (massa total do sistema):

$$M = 2m$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = m\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \qquad \boxed{M = 2m}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{M}{2}\frac{d^2}{dt}\underbrace{(r_1 + r_2)}_{\mathbf{R}} = F^{(ext)}$$

$$M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}^{(\mathrm{ext})}$$



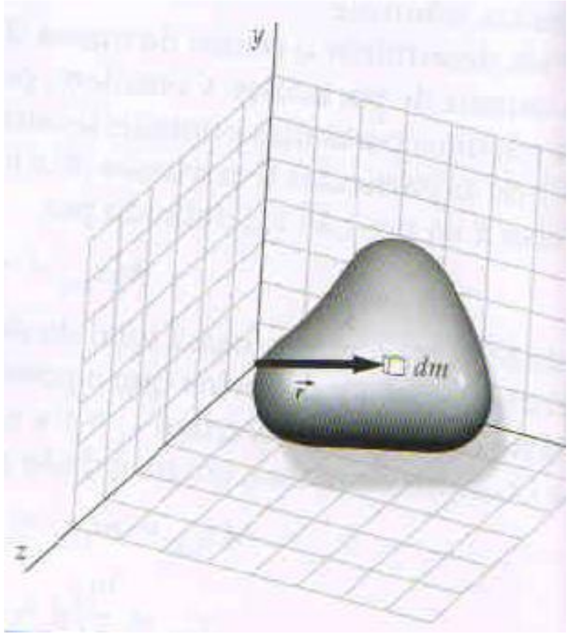
Centro de Massa

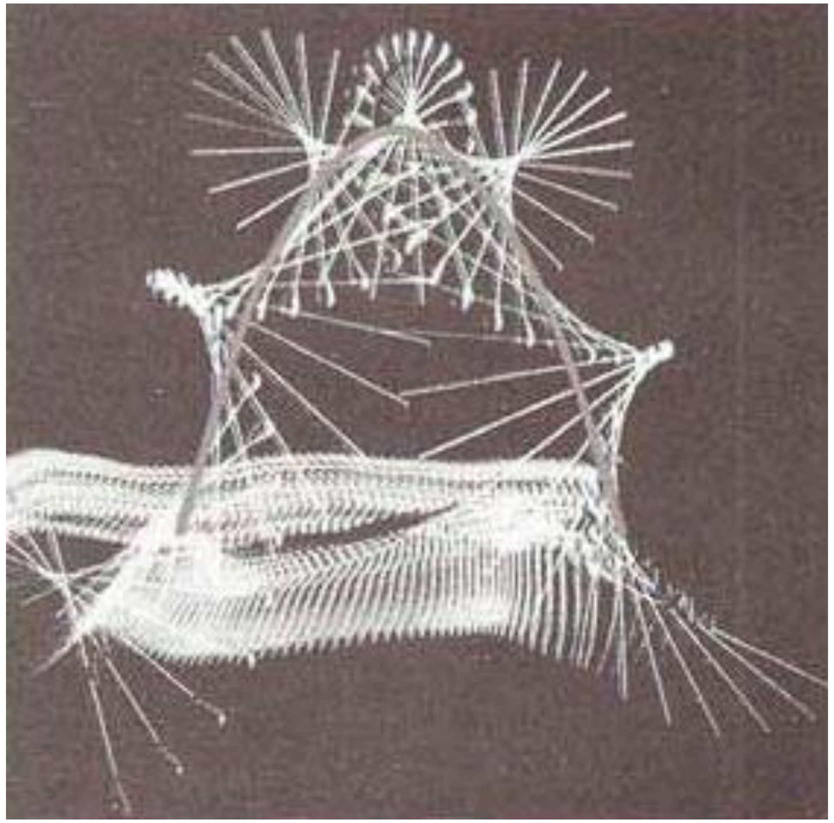
$$\boxed{\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}$$

Vetor posição do ponto médio P_1P_2

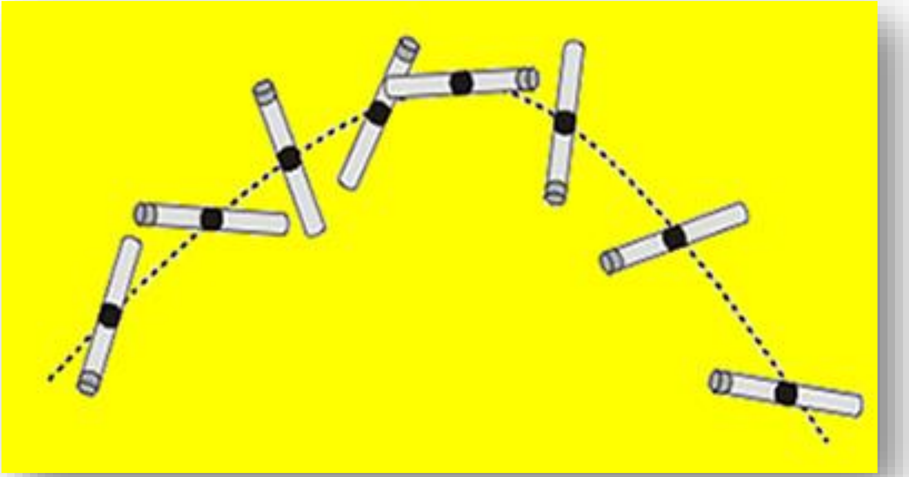
Centro de Massa

- Ponto que se move como se toda a massa do corpo estivesse concentrada nele e como se todas as forças externas estivessem aplicadas sobre ele.





- Bola: trajetória parabólica
- Bastão: movimento mais complicado
  - Cada extremidade se move em uma direção diferente!



Sistema de duas partículas com MASSAS QUAISQUER

$$\mathbf{P} = m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}$$

$$Z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r}_j = x_j\mathbf{i} + y_j\mathbf{j} + z_j\mathbf{k} \ (j = 1,2)$$

Vetor posição do CM do sistema

- *Média Ponderada dos vetores de posição das duas partículas com pesos correspondentes as massas.*

❑ Movimento interno: descrito pelos deslocamentos relativos das duas partículas com relação ao CM

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_1 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_2 + m_2\mathbf{r}_2 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

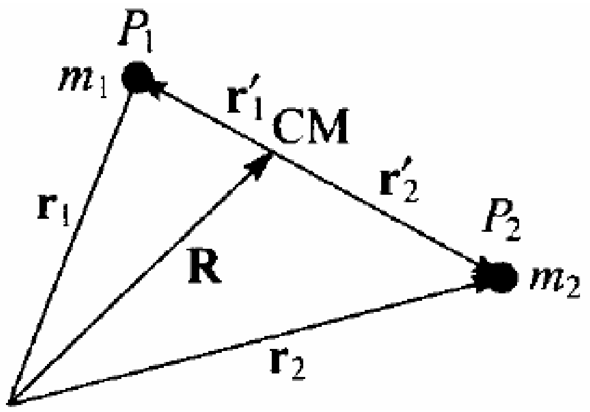
$$\boxed{\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}}$$

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = -\frac{m_2}{M}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \frac{m_1}{M}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$$\mathbf{r}_2' = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{r}_1'$$

$$m_1\mathbf{r}_1' + m_2\mathbf{r}_2' = 0$$



❑ CM: divide o segmento na razão inversa das massas, estando sempre mais próximo da massa maior.

$$m_1\frac{d\mathbf{r}_1'}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2'}{dt} = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0$$

Momento total do sistema relativo ao CM é nulo! = se concentra no movimento do CM

Para um corpo constituído de N partículas:

$$m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \underbrace{\cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{N} \mathbf{F}_{i(j)}}}_{0} + \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

a partícula não interage com ela mesma

A resultante de todas as forças internas do sistema se anula, pois somamos todos os pares ação e reação

$$M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}^{(\text{ext})} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

- Derivando:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \mathbf{P} = M\frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

Para um sistema de partículas:

soma dos momentos individuais

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \mathbf{P}$$

Momento Linear total de um sistema

Quantidade de Movimento (ou Momento)

$$\frac{d\vec{P}_{sis}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{cm})}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_{ext}$$

Variação do Momento Linear de um sistema: depende das Forças externas ao sistema.

Na ausência de Forças Externas: Momento Linear do sistema se conserva.

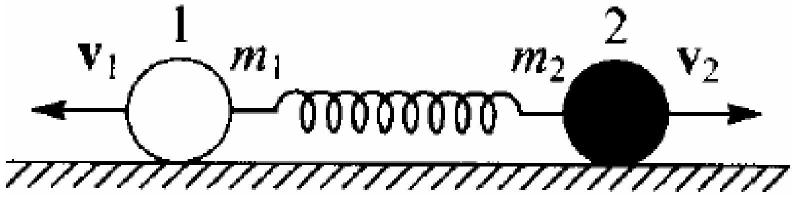
$$\sum_i \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_{sis}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{sis} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{cm} = constante$$

Lei da conservação da Quantidade de Movimento

Lições da estação orbital

EXEMPLOS:

- Par de partículas ligadas a uma mola:



1. Atrito desprezível $\Rightarrow$ $F^{ext}=0$ e F^{int}=newtoniana $\Rightarrow$ E_{MEC} se conserva

   O CM inicialmente em repouso permanece em repouso.

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0$$

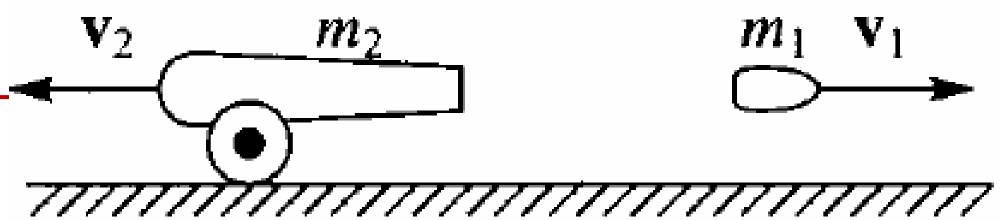
$$\mathbf{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2}{\frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1}$$

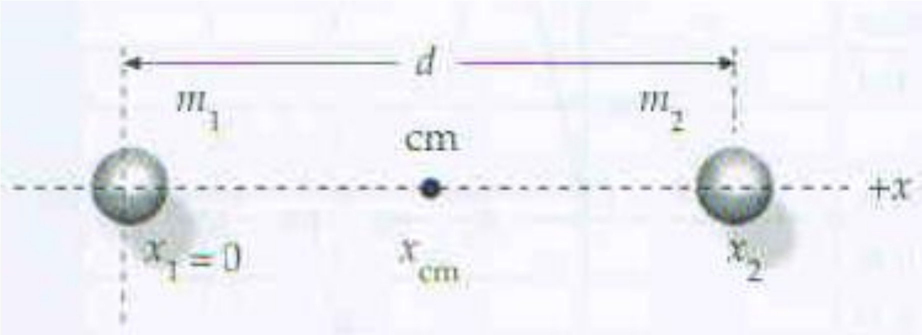
2. Atrito não desprezível $\Rightarrow$ o mesmo para as duas partículas

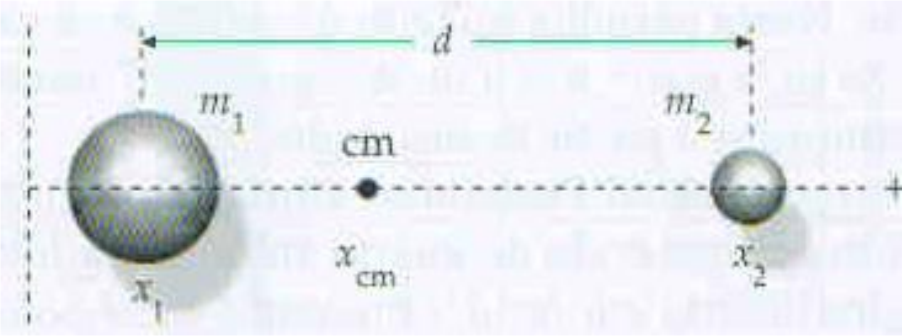
   - m1 = m2: $F^{ext}=0$ e CM em repouso. Ambas são freadas simetricamente.
   - m1 $\neq$ m2: $F^{ext} \neq 0$ e CM se desloca!

- Canhão disparando uma bala:



Determinação do CM





Para duas partículas unidas por uma haste de comprimento d

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right)$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1 x_1 + m_2 (x_1 + d)\right)$$

$$x_{cm} = x_1 + \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}$$

Colocando o referencial na partícula 1

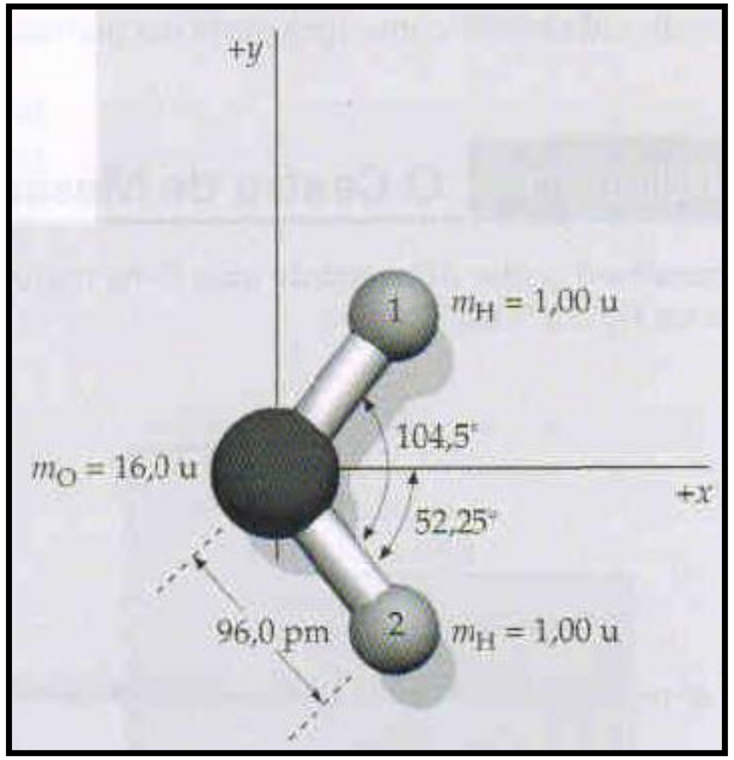
então $x_1=0$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_2 d\right) = \frac{m_2 d}{m_1 + m_2}$$

Exercício

Centro de Massa da molécula de água (H_20).

Com m_O= 16 u e m_H= 1 u, distância entre o oxigênio e o hidrogênio de 96 pm e ângulo de abertura da molécula de 104,5°.



Para 3 partículas:

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$x_{cm} = \frac{m_{H_1} x_{H_1} + m_{H_2} x_{H_2} + m_O x_O}{m_{H_1} + m_{H_2} + m_O}$$

$$y_{cm} = \frac{m_{H_1} y_{H_1} + m_{H_2} y_{H_2} + m_O y_O}{m_{H_1} + m_{H_2} + m_O}$$

$$x_O = y_O = 0$$

$$x_{H_1} = x_{H_2} = 96x10^{-12} \cos 52{,}25°$$

$$y_{H_1} = -y_{H_2} = 96x10^{-12} \sin 52{,}25°$$

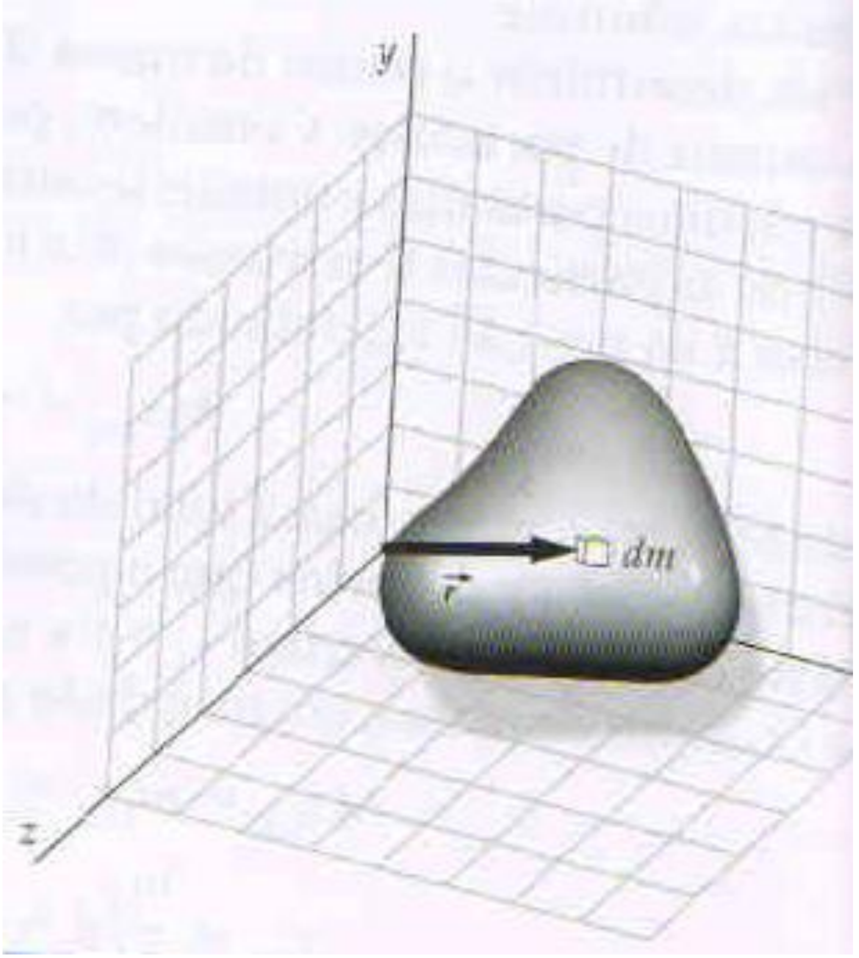
$$\boxed{\vec{r}_{cm} = (6{,}53x10^{-12}\,\hat{i} + 0\,\hat{j})m}$$

Centro de Massa – Distribuição de Massa

Centro de Massa de um corpo: $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)$

Para um corpo extenso com distribuição contínua de massa:

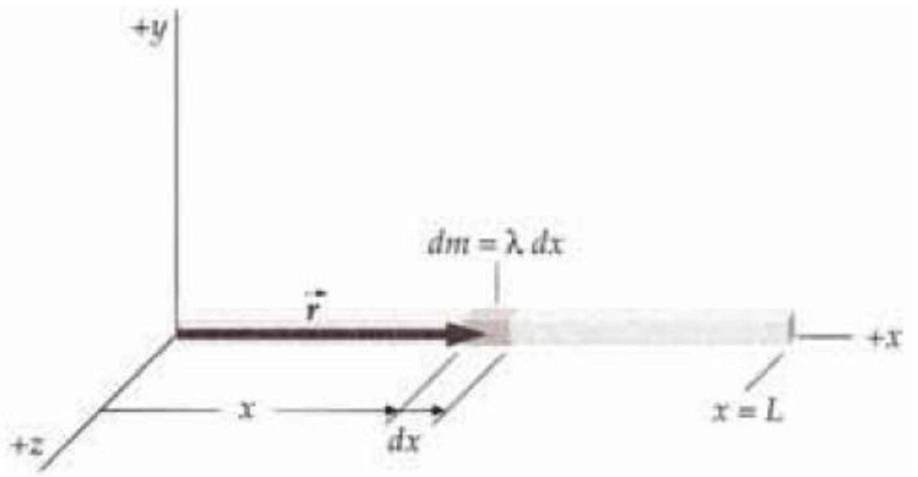
$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm} \Rightarrow \boxed{M = \int dm}$$



Se o corpo possuir simetrias geométricas, o centro de massa estará no centro de simetria.

Exercício

Centro de Massa de uma barra uniforme de comprimento L e densidade linear de massa λ.



$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm}$$

$$\left\{\begin{array}{l} M = \int dm \\ \vec{r} = x\hat{i} \\ dm = \lambda dx \end{array}\right.$$

Densidade linear de massa: λ=M/L

Pedacinho infinitesimal dx: dm=λdx

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \lambda dx = \lambda L$$

Centro de massa:

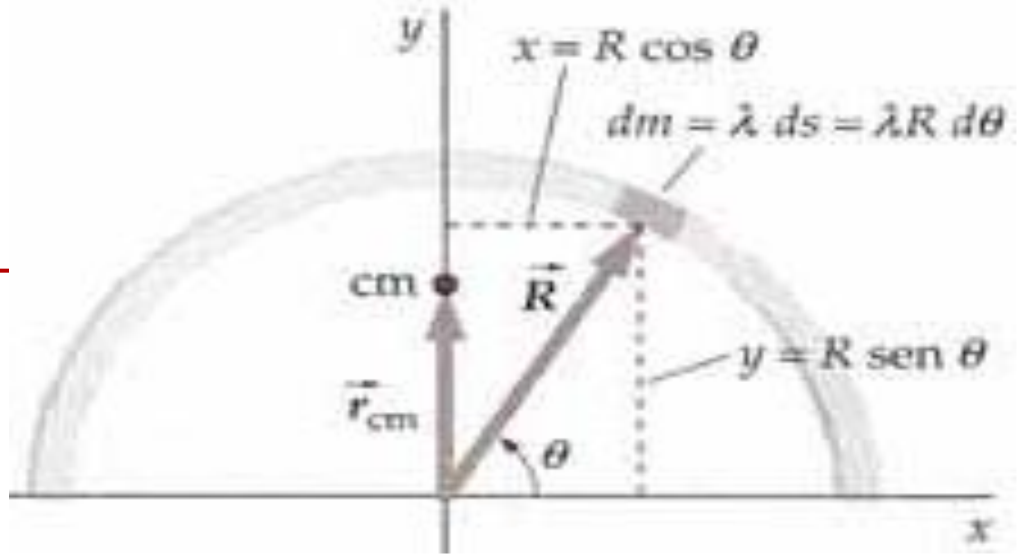
$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\hat{i}\,dm = \left(\frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx\right)\hat{i}$$

$$\vec{r}_{cm} = \left(\frac{1}{M}\lambda\int_0^L xdx\right)\hat{i} = \left(\frac{1}{M}\lambda\frac{L^2}{2}\right)\hat{i}$$

$$\vec{r}_{cm} = \left(\frac{1}{\lambda L}\lambda\frac{L^2}{2}\right)\hat{i} = \frac{L}{2}\hat{i}$$

Exercício

Centro de Massa de um anel semicircular uniforme de raio R e densidade linear de massa λ.



Densidade linear de massa: λ=M/πR.

Pedaço infinitesimal ds: dm=λds

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \lambda ds = \int_0^\pi \lambda R d\theta = \lambda \pi R$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm = \frac{1}{M}\int \vec{R}dm$$

$$dm = \lambda R d\theta$$

$$\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^\pi R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})\lambda R d\theta$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^\pi (\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})d\theta$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{R}{\pi}\left(\sin\theta\Big|_0^\pi \hat{i} - \cos\theta\Big|_0^\pi \hat{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{2}{\pi}R\hat{j}}$$

Movimento no CM

Pode-se decompor o movimento de um corpo como:

Movimento do CM

+

Movimento individual das partículas constituintes em relação ao CM

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)}$$

Derivando:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) \Longrightarrow \boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right)}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right) \Longrightarrow \boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{a}_i\right)}$$

Movimento no CM

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i m_i \vec{a}_i\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i \vec{F}_i\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum_i \vec{F}_{i_{\text{int}}} + \sum_i \vec{F}_{i_{ext}}\right)}$$

3a Lei de Newton: as forças internas aparecem aos pares e se cancelam:

$$\boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i \vec{F}_{i_{ext}} = \frac{1}{M}\vec{F}_{R_{ext}}}$$

O Centro de Massa de um sistema se move como uma partícula pontual com a massa total do sistema, sob a influência da força externa resultante que atua sobre o sistema.