



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3554 – Introdução às Estruturas Aeronáuticas

Aula #23

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

07/12/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Introdução à Análise Estrutural de Materiais Compósitos –
Parte III

1. Análise de um laminado: hipóteses;
2. Análise de um laminado: formulação.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Análise de um laminado: hipóteses

1. O laminado consiste de lâminas perfeitamente coladas (ou seja, não há deslizamento relativo entre as lâminas ou descolamento das lâminas);
2. O material de cada camada (lâmina) pode ser considerado homogêneo, ortótropo e transversalmente isótropo;
3. A camada de resina usada para unir as lâminas é infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento de forma que os deslocamentos são contínuos através das lâminas;
4. O laminado é delgado (ou seja, $H/L \ll 1$, onde H é a espessura total do laminado e L é um comprimento característico do mesmo);
5. O laminado não está sujeito a carregamentos transversais (ou seja, $\sigma_z = 0$, tanto para o laminado quanto para cada uma de suas camadas);
6. Uma linha originalmente reta e ortogonal à superfície de referência permanece reta e ortogonal a essa superfície quando o laminado é estendido e fletido;

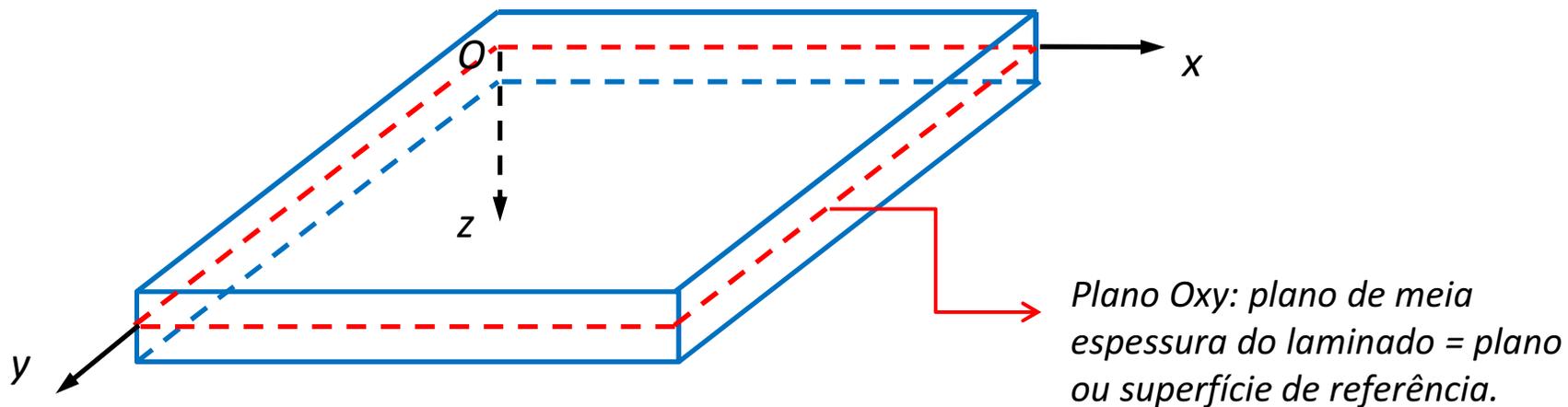


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

7. Os segmentos normais à superfície de referência são considerados inextensíveis (ou seja, $\varepsilon_z = 0$ em todos os pontos do laminado);
8. Considera-se válida a hipótese de linearidade geométrica (pequenos deslocamentos, pequenas rotações e pequenas deformações);
9. As relações tensão-deformação de cada camada (lâmina) do laminado são lineares;
10. O laminado é simétrico em relação ao plano de meia-espessura.



2. Análise de um laminado: formulação





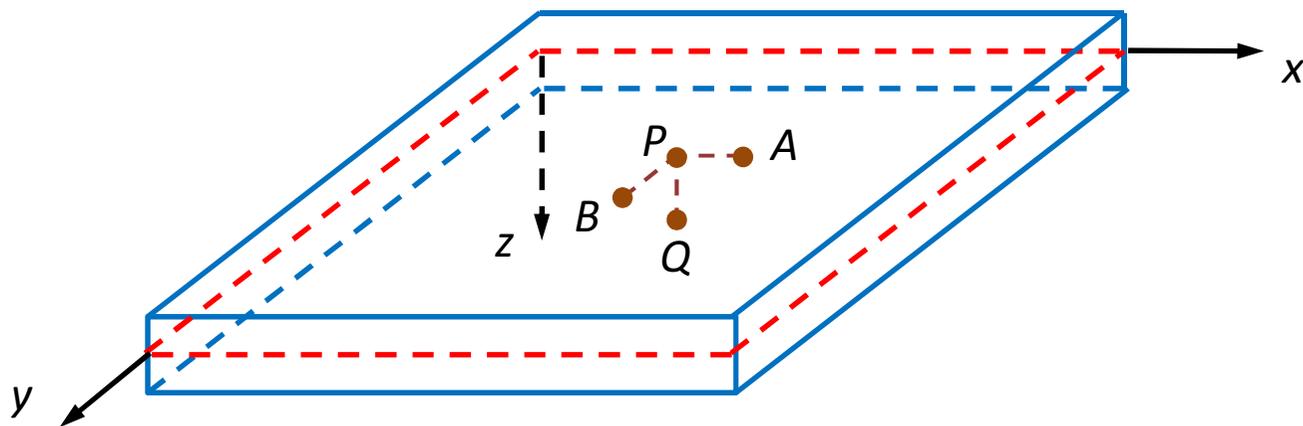
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Sejam P , A e B pontos pertencentes ao plano de meia espessura do laminado na configuração inicial (não deformada) do mesmo, tais que:

$$P = (x_P, y_P, 0)$$

$$A = (x_A, y_A, 0) = \\ = (x_P + dx, y_P, 0)$$

$$B = (x_B, y_B, 0) = \\ = (x_P, y_P + dy, 0)$$



Seja também o ponto Q de coordenadas: $Q = (x_Q, y_Q, z_Q) = (x_P, y_P, dz)$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Desta forma, resultam:

$$(A - P) = (dx, 0, 0) \quad (B - P) = (0, dy, 0) \quad (Q - P) = (0, 0, dz)$$

Como disposto na hipótese (6), vemos que o elemento linear $(Q - P)$ é, de fato, ortogonal ao plano de meia espessura na configuração de referência:

$$(Q - P) \cdot (A - P) = 0 \quad (Q - P) \cdot (B - P) = 0$$

Após a deformação, os pontos P, A, B e Q assumem novas posições no espaço e suas coordenadas passam a ser dadas por:

$$P' = (x_P + u_P, y_P + v_P, w_P)$$

$$A' = (x_A + u_A, y_A + v_A, w_A) = (x_P + dx + u_A, y_P + v_A, w_A)$$

$$B' = (x_B + u_B, y_B + v_B, w_B) = (x_P + u_B, y_P + dy + v_B, w_B)$$

$$Q' = (x_Q + u_Q, y_Q + v_Q, z_Q + w_Q) = (x_P + u_Q, y_P + v_Q, dz + w_Q)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Desta forma, resultam:

$$(A' - P') = (dx + u_A - u_P, v_A - v_P, w_A - w_P)$$

$$(B' - P') = (u_B - u_P, dy + v_B - v_P, w_B - w_P)$$

$$(Q' - P') = (u_Q - u_P, v_Q - v_P, dz + w_Q - w_P)$$

Porém, da expansão em série de Taylor de funções de várias variáveis, podemos considerar que são válidas as seguintes aproximações (desde que se tomem pontos relativamente próximos uns dos outros):

$$u_A \cong u_P + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$u_B \cong u_P + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$u_Q \cong u_P + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$v_A \cong v_P + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$v_B \cong v_P + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$v_Q \cong v_P + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$w_A \cong w_P + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

$$w_B \cong w_P + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

$$w_Q \cong w_P + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Combinando as relações indicadas no slide anterior, temos:

$$(A' - P') = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \frac{\partial v}{\partial x} dx, \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$$

$$(B' - P') = \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy, dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy, \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}, 1 + \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy$$

$$(Q' - P') = \left(\frac{\partial u}{\partial z} dz, \frac{\partial v}{\partial z} dz, dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz$$

Retomando a hipótese (6) segundo a qual “... uma linha originalmente reta e ortogonal à superfície de referência permanece reta e ortogonal a essa superfície quando o laminado é estendido e fletido”, teremos.

$$(Q' - P') \cdot (A' - P') = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$(Q' - P') \cdot (B' - P') = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}, 1 + \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Fazendo os dois produtos escalares e desprezando os infinitésimos de ordem superior (vide hipótese (8), de linearidade geométrica), virá:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, 1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \cdot \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, 1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}, 1 + \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \iff \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Considerando que $w = w(x, y)$, o que é equivalente a admitir que $\varepsilon_z = \partial w / \partial z = 0$ para todo o laminado, teremos, após a integração das relações acima com relação a z :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Onde, nas relações anteriores, as funções $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ correspondem aos deslocamentos (nas direções x e y) dos pontos do laminado (independentemente de sua posição z). Como veremos, tais deslocamentos estarão associados aos esforços de membrana N_x, N_y e $N_{xy} = N_{yx}$ atuantes no laminado.

Considerando novamente, a hipótese de LG (hipótese (8)), e utilizando as relações deformações-deslocamentos, teremos para os alongamentos $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e γ_{xy} :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Na forma matricial: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} - z\{\kappa\}$

Onde:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^t$$

$$\{\varepsilon^0\} = \{\varepsilon_{x,0} \quad \varepsilon_{y,0} \quad \gamma_{xy,0}\}^t = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\}^t$$

$$\{\kappa\} = \{\kappa_x \quad \kappa_y \quad 2\kappa_{xy}\}^t = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^t$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Relações Tensão-Deformação:

Como visto na aula anterior, as relações entre o campo de tensões planas (σ_x , σ_y e τ_{xy}) e as componentes de deformação no plano (ε_x , ε_y e γ_{xy}), para lâminas transversalmente isotrópicas, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Ou, na forma matricial: $\{\sigma\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon\}$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad [\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:

$$\left[\begin{array}{l} \{\sigma\} = [\overline{Q}]\{\varepsilon\} \\ \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} - z\{\kappa\} \end{array} \right. \Rightarrow \{\sigma\} = [\overline{Q}]\{\varepsilon_0\} - z[\overline{Q}]\{\kappa\}$$

Utilizando o subscrito 'x' para lembrar que as componentes de tensões (e de deformações) se referem à base $b' = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, e o subscrito 'k' para lembrar que as tensões, deformações e as constantes da matriz $[\overline{Q}]$ se referem à *k-ésima* lâmina, teremos:

$$\{\sigma\}_{x,k} = [\overline{Q}]_{x,k} \{\varepsilon_0\}_x - z[\overline{Q}]_{x,k} \{\kappa\}_x$$

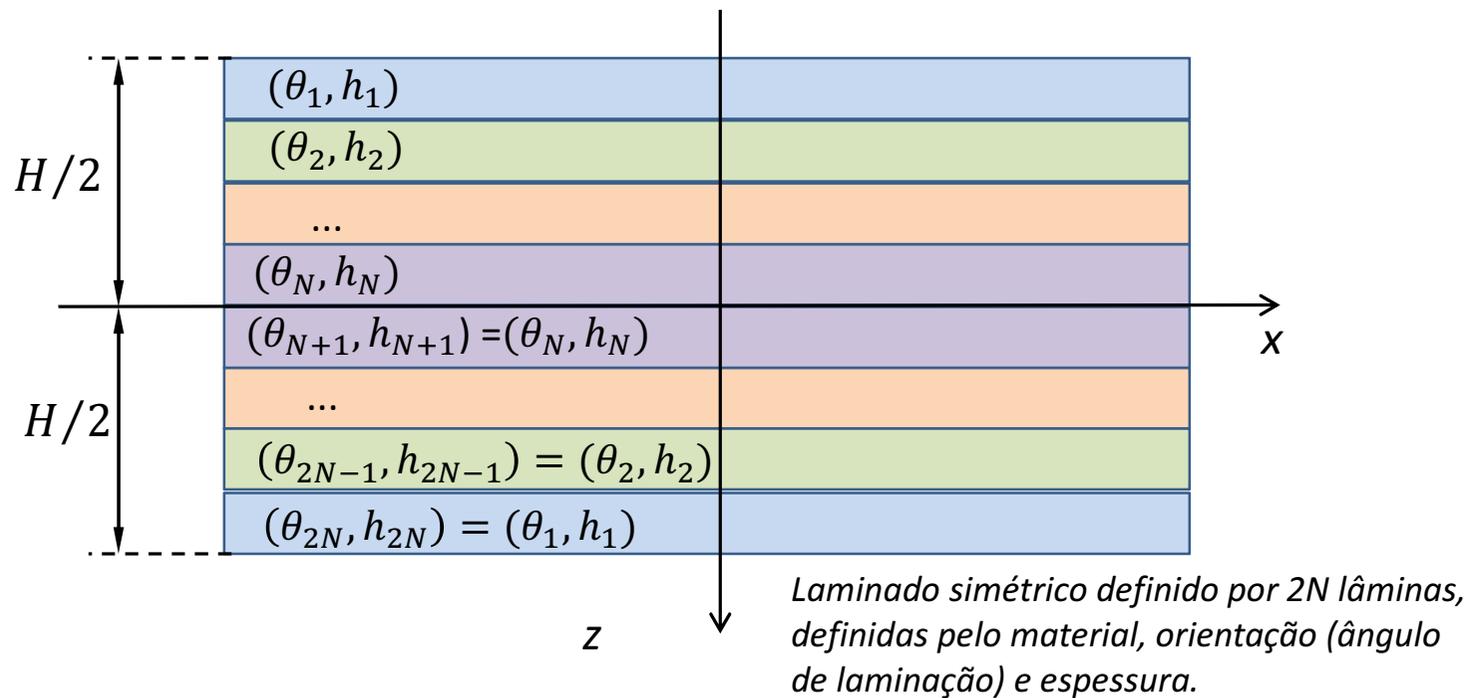


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Distribuição de tensões em um laminado simétrico:

Seja o laminado simétrico definido por:

$$[\theta_1, h_1 / \theta_2, h_2 / \dots / \theta_N, h_N]_S = [\theta_1, h_1 / \theta_2, h_2 / \dots / \theta_N, h_N / \theta_N, h_N / \dots / \theta_2, h_2 / \theta_1, h_1]_T$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como vimos, a distribuição de tensões em cada lâmina é:

$$\{\sigma\}_{x,k} = [\bar{Q}]_{x,k} \{\varepsilon_0\}_x - z[\bar{Q}]_{x,k} \{\kappa\}_x$$

Deve-se observar que:

- Tanto $\{\varepsilon_0\}_x$ quanto $\{\kappa\}_x$ são constantes ao longo da espessura do laminado, sendo os mesmos para todas as lâminas que o compõem (daí não ser utilizado o subscrito 'k' para estes vetores);
- As deformações variam de forma contínua e linear ao longo da coordenada z, conforme indicam as relações dadas no slide #12;
- As tensões, contudo, podem ser descontínuas quando passamos de uma lâmina para a lâmina seguinte (ou seja, há saltos de tensões nas interfaces), devido às diferentes propriedades elásticas de cada lâmina (diferentes matrizes $[\bar{Q}]_{x,k'}$ decorrentes da mudança do ângulo de orientação, das propriedades das fibras e da matriz de cada lâmina, ou mesmo do teor de fibras de cada lâmina).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

De posse da distribuição de tensões em cada lâmina, podemos determinar os esforços solicitantes no laminado (todos por unidade de comprimento), à semelhança do que foi estudado na teoria de placas. Assim, definimos os esforços de membrana N_x , N_y e $N_{xy} = N_{yx}$ como:

$$N_x = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x dz \quad \Rightarrow \quad \text{Força de membrana (devida a } \sigma_x \text{) por unidade de comprimento do laminado na direção } y.$$

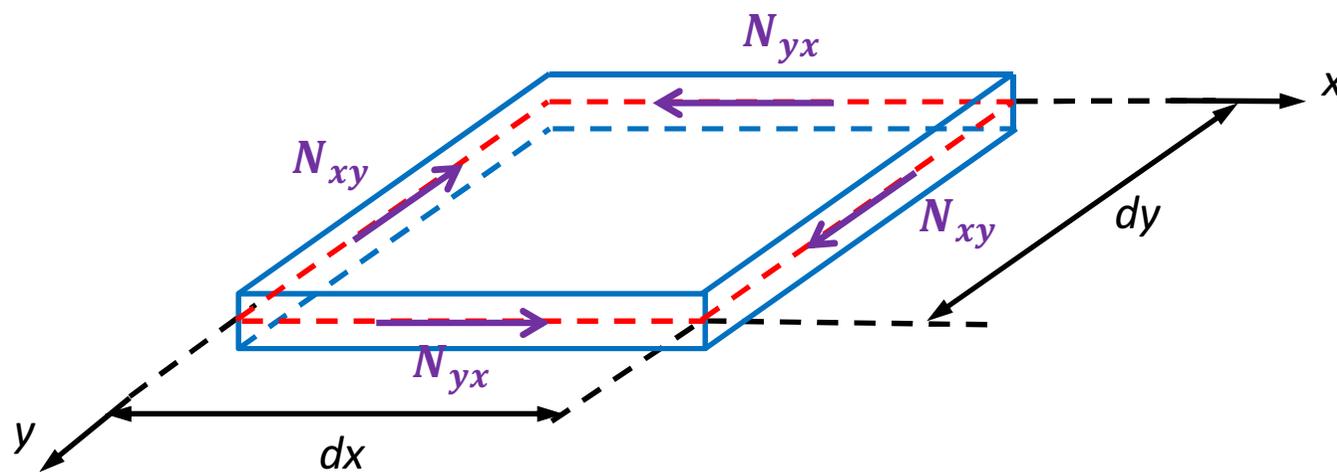
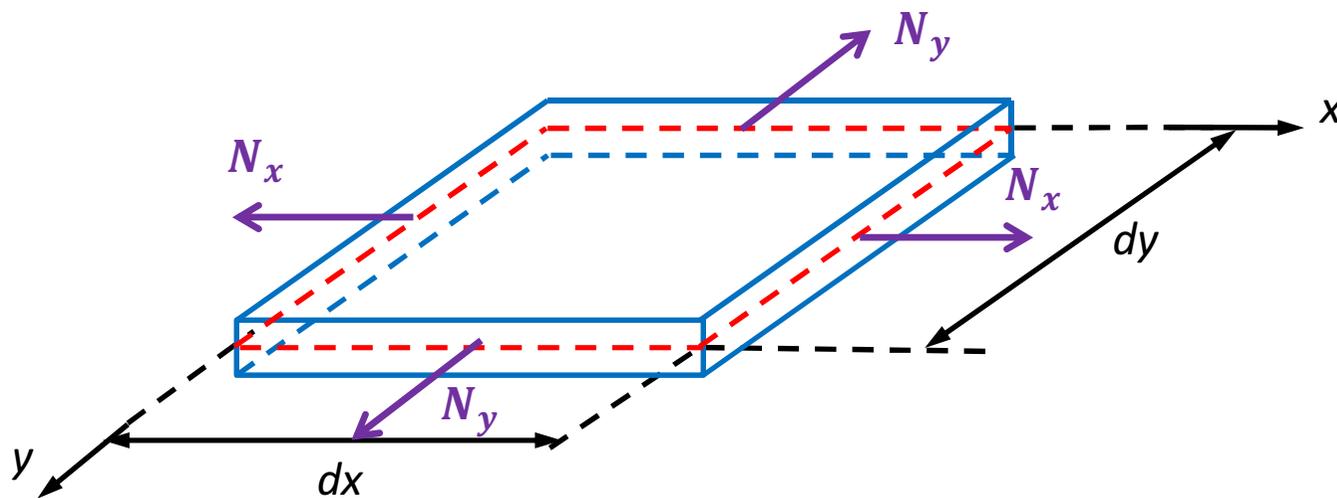
$$N_y = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_y dz \quad \Rightarrow \quad \text{Força de membrana (devida a } \sigma_y \text{) por unidade de comprimento do laminado na direção } x.$$

$$N_{xy} = \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xy} dz \quad \Rightarrow \quad \text{Força de membrana (devida a } \tau_{xy} \text{) por unidade de comprimento do laminado na direção } y.$$

$$N_{yx} = \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{yx} dz \quad \Rightarrow \quad \text{Força de membrana (devida a } \tau_{yx} \text{) por unidade de comprimento do laminado na direção } x.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

De forma análoga, definimos os momentos fletores (M_x e M_y) e os momentos de torção (M_{yx} e M_{xy}) atuantes no laminado como:

$$M_x = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x z dz \quad \Rightarrow \quad \text{Momento fletor (devido a } \sigma_x), \text{ que flete o laminado em torno da direção } y, \text{ e expresso em unidades de momento por unidade de comprimento do laminado na direção } y.$$

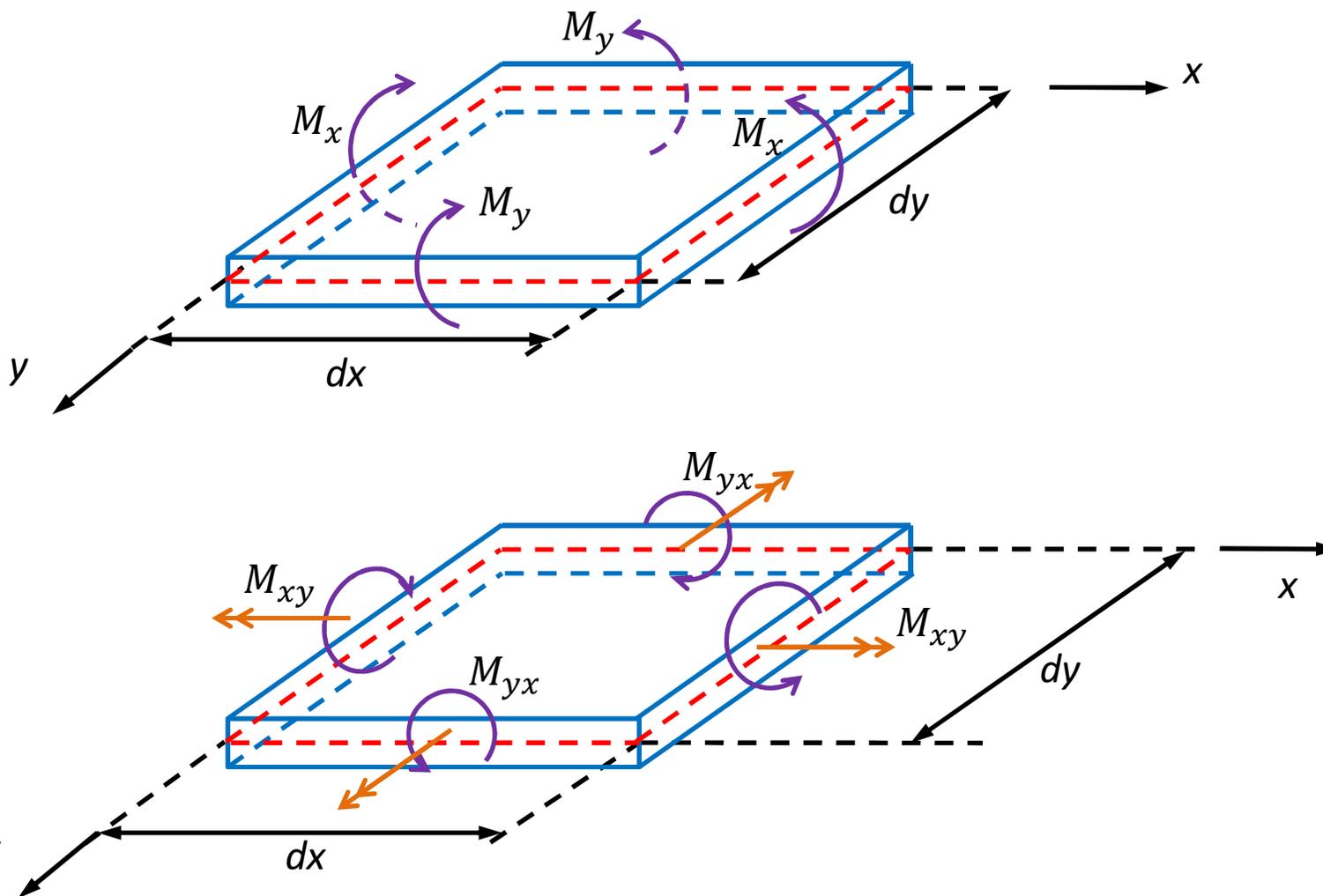
$$M_y = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_y z dz \quad \Rightarrow \quad \text{Momento fletor (devido a } \sigma_y), \text{ que flete o laminado em torno da direção } x, \text{ e expresso em unidades de momento por unidade de comprimento do laminado na direção } x.$$

$$M_{yx} = \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{yx} z dz \quad \Rightarrow \quad \text{Momento torçor (devido a } \tau_{yx}), \text{ que torce o laminado em torno da direção } y, \text{ e expresso em unidades de momento por unidade de comprimento do laminado na direção } x.$$

$$M_{xy} = - \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xy} z dz \quad \Rightarrow \quad \text{Momento torçor (devido a } \tau_{xy}), \text{ que torce o laminado em torno da direção } x, \text{ e expresso em unidades de momento por unidade de comprimento do laminado na direção } y.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

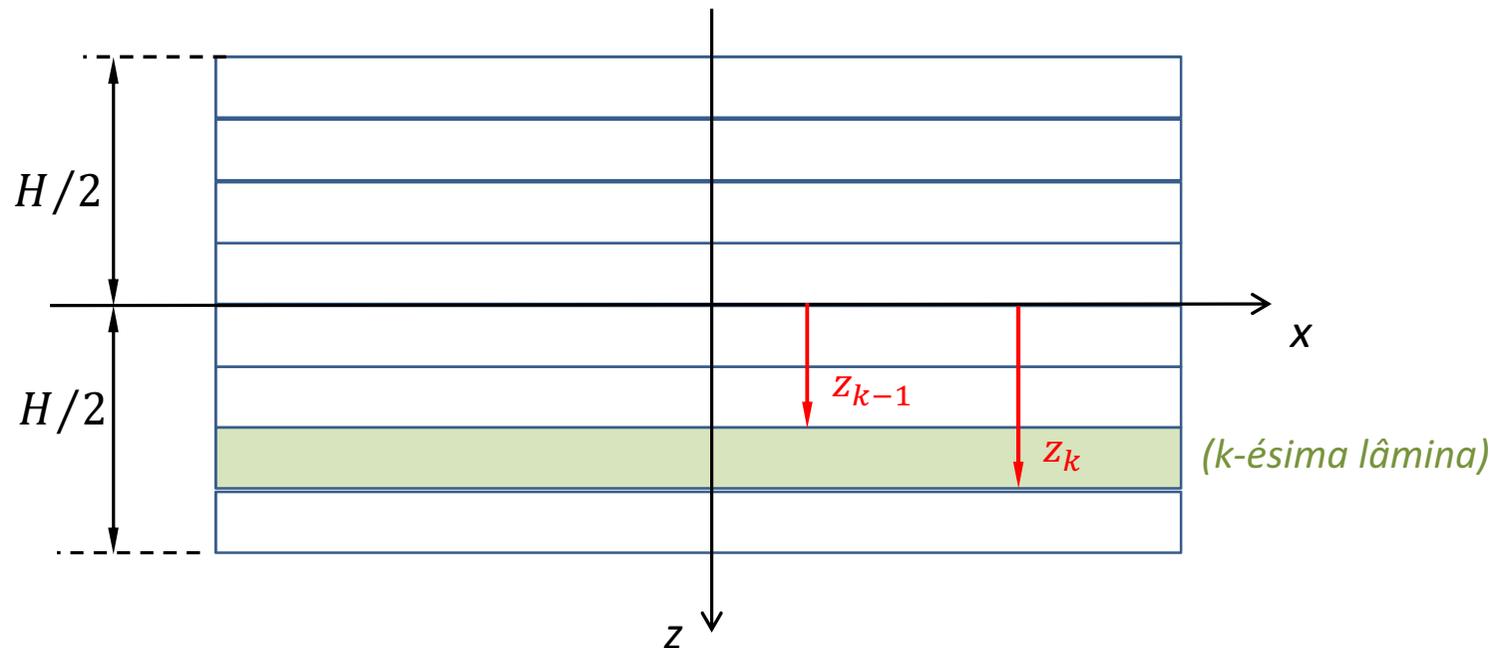




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Naturalmente, todos estes esforços solicitantes também podem ser expressos da seguinte forma (já utilizando a forma matricial para simplificar):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{x,k} \\ \sigma_{y,k} \\ \tau_{xy,k} \end{Bmatrix} dz \qquad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{2N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{x,k} \\ \sigma_{y,k} \\ \tau_{yx,k} \end{Bmatrix} z dz$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Utilizando a notação matricial, podemos criar os vetores coluna $\{N\}_x$ e $\{M\}_x$ que fornecem os seis esforços solicitantes já descritos. Assim:

$$\{N\}_x = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{M\}_x = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix}$$

Deve-se observar que o subscrito 'x' utilizado nos vetores $\{N\}_x$ e $\{M\}_x$ indica que os esforços solicitantes são referentes ao sistema de coordenadas Oxy .

Utilizando, agora, as definições e relações vistas nos slides #16 e #21, teremos:

$$\{N\}_x = \sum_{k=1}^{2N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ [\bar{Q}]_{x,k} \{\varepsilon_0\}_x - z [\bar{Q}]_{x,k} \{\kappa\}_x \right\} dz$$

$$\{M\}_x = \sum_{k=1}^{2N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ z [\bar{Q}]_{x,k} \{\varepsilon_0\}_x - z^2 [\bar{Q}]_{x,k} \{\kappa\}_x \right\} dz$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ou seja:

$$\left[\begin{array}{l} \{N\}_x = \sum_{k=1}^{2N} [\bar{Q}]_{x,k} \left[\{\varepsilon_0\}_x \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz - \{\kappa\}_x \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right] \\ \{M\}_x = \sum_{k=1}^{2N} [\bar{Q}]_{x,k} \left[\{\varepsilon_0\}_x \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz - \{\kappa\}_x \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right] \end{array} \right] \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{N\}_x = \sum_{k=1}^{2N} [\bar{Q}]_{x,k} \left[\{\varepsilon_0\}_x (z_k - z_{k-1}) - \{\kappa\}_x \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2} \right] \\ \{M\}_x = \sum_{k=1}^{2N} [\bar{Q}]_{x,k} \left[\{\varepsilon_0\}_x \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2} - \{\kappa\}_x \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \right] \end{array} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Podemos, por fim, definir as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$, todas 3×3 , dadas por:

$$[A] = \sum_{k=1}^{2N} (z_k - z_{k-1}) [\bar{Q}]_{x,k} = \sum_{k=1}^{2N} h_k [\bar{Q}]_{x,k}$$

$$[B] = - \sum_{k=1}^{2N} \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2} [\bar{Q}]_{x,k} = - \sum_{k=1}^{2N} h_k \bar{z}_k [\bar{Q}]_{x,k}$$

$$[D] = - \sum_{k=1}^{2N} \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} [\bar{Q}]_{x,k} = - \sum_{k=1}^{2N} \left(h_k (\bar{z}_k)^2 + \frac{h_k^3}{12} \right) [\bar{Q}]_{x,k}$$

Onde:
$$\left[\begin{array}{ll} h_k = z_k - z_{k-1} & \text{(espessura da } k\text{-ésima lâmina)} \\ \bar{z}_k = \frac{(z_k + z_{k-1})}{2} & \text{(cota da superfície média da } k\text{-ésima lâmina)} \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Desta forma, resulta, na forma abreviada:

$$\begin{Bmatrix} \{N\}_x \\ \{M\}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\}_x \\ \{\kappa\}_x \end{Bmatrix}$$

Ou na forma estendida:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{y,0} \\ \gamma_{xy,0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

1. Como as matrizes $[\bar{Q}]_{x,k}$ (de cada lâmina) são simétricas, as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ também são simétricas;
2. Como a matriz $[A]$ depende apenas das espessuras de cada lâmina e das matrizes $[\bar{Q}]_{x,k}$ (também de cada lâmina), conclui-se que a matriz $[A]$ independe da ordem em que as lâminas estão dispostas no laminado;
3. Como as matrizes $[B]$ e $[D]$ dependem das cotas \bar{z}_k de cada lâmina, a ordem em que as lâminas estão dispostas no laminado interfere nos valores dos elementos destas matrizes;
4. A matriz $[A]$ é a matriz de rigidez do laminado no que tange aos esforços de membrana e deformações no plano médio;
5. A matriz $[B]$ é denominada matriz de acoplamento entre os esforços de membrana no laminado e as curvaturas no plano médio do mesmo, ou ainda, entre os momentos atuantes no laminado e as deformações médias do mesmo;
6. A matriz $[D]$ é a matriz de rigidez do laminado no que tange à flexo-torção, relacionando os momentos atuantes no laminado com as curvaturas no plano médio do mesmo.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Se quisermos determinar as deformações e curvaturas, uma vez fornecidos os esforços solicitantes no laminado, é preciso inverter a relação antes obtida:

$$\begin{Bmatrix} \{N\}_x \\ \{M\}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\}_x \\ \{\kappa\}_x \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\}_x \\ \{\kappa\}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{N\}_x \\ \{M\}_x \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\}_x \\ \{\kappa\}_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [b]^t & [d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{N\}_x \\ \{M\}_x \end{Bmatrix}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

1. Para se calcular as matrizes $[a]$, $[b]$ e $[d]$ é preciso inverter a matriz 6×6 formada pelas sub-matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ completa;
2. Em geral: $[a] \neq [A]^{-1}$, $[b] \neq [B]^{-1}$ e $[d] \neq [D]^{-1}$;
3. Para laminados em que a matriz de acoplamento $[B]$ é nula (não há acoplamento), então valem as relações:

$$[a] = [A]^{-1}, [b] = [0] \text{ e } [d] = [D]^{-1}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Mendonça, P.T.R., *Materiais Compostos & Estruturas-Sanduiche – Projeto e Análise*, 2ª ed., Ed. Orsa Maggiore, 2019.
- [2] Megson, T.H.G. *Aircraft Structures for Engineering Students*. 6th ed., Butterworth-Heinemann, 2016. Cap. 25: Laminated composite structures