Mudanças de Base

Seja $T \in L(V)$. Seja $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Seja $C = \{u_1, \ldots, u_n\}$ outra base de V.

Como se relacionam as matrizes $[T]_B$ e $[T]_C$?

Seja $I : V \longrightarrow V$ o operador identidade $I(v) = v$ para todo $v \in V$.

Suponha que $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$
$= y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n$.

Primeira pergunta:
Como se relacionam as matrizes $[v]_B$ e $[v]_C$?

Vamos usar os seguintes resultados:

(1) $\underset{B}{V} \xrightarrow{T} \underset{C}{W}$ $\quad [T]_{B,C} [v]_B = [T(v)]_C$

e

(2) $\underset{B}{V} \xrightarrow{T} \underset{C}{W} \xrightarrow{S} \underset{D}{U}$ $\quad [S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D} [T]_{B,C}$

$L(V) = \{T: V \to V \mid T \text{ é linear}\}$

I = operador identidade

$I: V \to V$, $I(v) = v$ para todo $v \in V$

I e linear e $T \circ I = I \circ T = T$:

$$\underbrace{V \xrightarrow{T} V \xrightarrow{I} V}_{} \xrightarrow{T} V$$

$(I \circ T)(v) = I(T(v)) = T(v)$

$(T \circ I)(v) = T(I(v)) = T(v)$

Agora note que se B é uma base qualquer de V então $\boxed{[I]_B = [I]_{B,B} = I_n}$, pois

$I(v_j) = v_j = 0v_1 + \cdots + 0v_{j-1} + 1 \cdot v_j + \cdots + 0v_n$,

ou seja $[I(v_j)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Sejam agora B e C bases (distintas) de V

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ $\quad C = \{u_1, \ldots, u_n\}$

o que é a matriz $[I]_{B,C}$?

Calcula $I(v_j) = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{nj}u_n$

$[I]_{B,C} = [I(v_1) | \cdots | I(v_n)]$

$[I]_{C,B}$: Calcule $I(u_j)$ e escreva como combinação linear da base B

$I(u_j) = b_{1j}v_1 + \cdots + b_{nj}v_n$

$[I]_{C,B} = [I(u_1) \cdots I(u_n)]$.

Vale que:

$$\boxed{\begin{aligned} [I]_{B,C}\,[v]_B &= [I(v)]_C = [v]_C \\ [I]_{C,B}\,[v]_C &= [I(v)]_B = [v]_B \end{aligned}}$$

(Primeira pergunta resolvida)

Exemplo: $I : \underset{B=can}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\hookrightarrow C = \{\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,2,1)}_{v_2}, \underbrace{(1,1,2)}_{v_3}\}$

Se $v = (1,2,3)$ (base canônica), quais são as coordenadas de v na base C?

Vamos notar primeiro a relações entre $[I]_{B,C}$ e $[I]_{C,B}$

$$\underset{B}{V} \xrightarrow{I} \underset{C}{V} \xrightarrow{I} \underset{B}{V} \xrightarrow{I} \underset{C}{V}$$

$$\boxed{I_n = [I \circ I]_B = [I]_{C,B}\,[I]_{B,C}}$$

$$\boxed{I_n = [I \circ I]_C = [I]_{B,C}\,[I]_{C,B}}$$

Logo $[I]_{B,C}^{-1} = [I]_{C,B}$ e

$$[I]_{B,C} = [I]_{C,B}^{-1}.$$

Para resolver o problema do exemplo:

Sabemos que $[I]_{can,B}\,[v]_{can} = [v]_B$.

Precisamos então determinar $[I]_{can,B}$.

A matriz fácil de montar é

$$[I]_{B,can} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Mas precisamos de $[I]_{can,B}$

Temos então que inverter A

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L1 \leftrightarrow L1-L2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L1-L3]{L1 \leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]_{can,B}$$

Logo $$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Conferindo:

$$\boxed{(1,2,3) = -2\underbrace{(1,1,1)}_{v_1} + \underbrace{(1,2,1)}_{v_2} + 2\underbrace{(1,1,2)}_{v_3}}$$

$$= (1,2,3)$$

Como se relacionam $[T]_B$ e $[T]_C$?
(Segunda pergunta)

Agora

Como se relacionam as matrizes $[T]_B$ e $[T]_C$?

$$\underset{C}{V} \xrightarrow{I} \underset{B}{V} \xrightarrow{T} \underset{B}{V} \xrightarrow{I} \underset{C}{V}$$

$$[T]_C = [I \circ T \circ I]_C = [I]_{C,B}\,[T]_B\,[I]_{B,C}$$

DEF: Sejam $M, N \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que M é semelhante a N se existe uma matriz P inversível, $P \in M_n(\mathbb{R})$, tal que $N = P^{-1} M P$.

Note que se M é semelhante a N, então N é semelhante a N, pois

$$P^{-1} M P = N \implies M = P N P^{-1}$$

Se $Q = P^{-1}$, então $Q^{-1} = P$.

Logo $M = Q^{-1} N P$.

Costumamos dizer que M e N são semelhantes.

Se $T \in L(V)$ e B, C são bases de V, então as matrizes $[T]_B$ e $[T]_C$ são semelhantes

DIAGONALIZAÇÃO

Autovalores e Autovetores

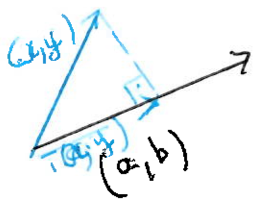
DEF: Seja $T \in L(V)$. Um número real $\lambda \in \mathbb{R}$ é um AUTOVALOR de T se existir $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. Tal vetor v é chamado de AUTOVETOR associado ao autovalor λ.

Geometricamente, um autovetor de T é uma "reta" de V que é fixa por T.

Exemplos

① $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(x,y) = \frac{(ax+by)a + (ax+by)b}{a^2+b^2}$$



Projeção ortogonal em $w = (a,b) \neq (0,0)$

Escrever $(x,y) = \underbrace{\lambda(a,b)}_{\text{projeção ortogonal}} + u$, onde $u \perp (a,b)$

Queremos λ tq

$$((x,y) - (\lambda a, \lambda b)) \cdot (a,b) = 0$$

$$a(x - \lambda a) + b(y - \lambda b) = 0$$

$$ax + by = \lambda(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{ax+by}{a^2+b^2}$$

$$T(x,y) = \frac{ax+by}{a^2+b^2}(a,b)$$

$$T(e_1) = \frac{a}{a^2+b^2}(a,b)$$

$$T(e_2) = \frac{b}{a^2+b^2}(a,b)$$

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$$

$$T(w) = T(a,b) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}(a,b) = 1(a,b)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [T]_B$$

Logo w é um autovetor de T associado

$B = \{\underset{w}{(a,b)}, \underset{v}{(-b,a)}\}$ a $\perp$.

$T(w) = w$

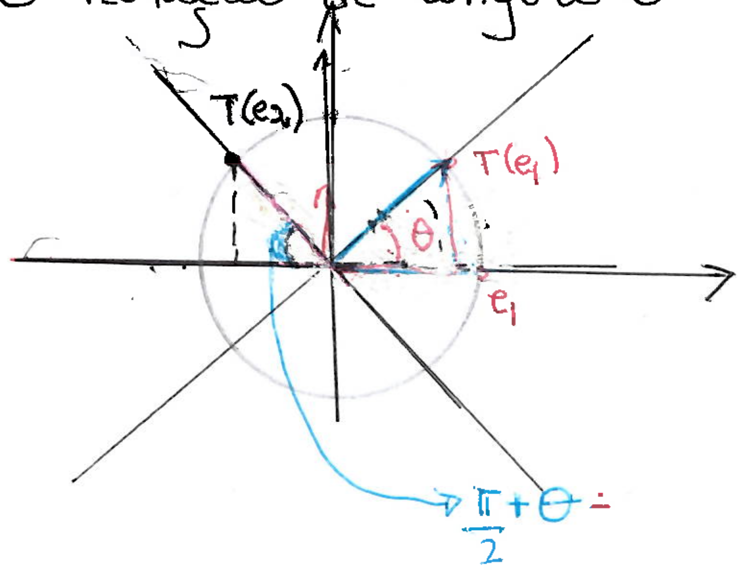
$T(v) = 0$

$$\ker T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x,y) = (0,0)\}$$

$$T(x,y) = (0,0) \iff ax+by = 0 \iff (x,y) \perp (a,b).$$

$(-b,a) \in \ker T$,

③ Rotação de ângulo θ



Não fixa nenhuma direção.

$T(e_1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$T(e_2) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\theta = \pi \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

NÃO TEM AUTOVETOR

Só tem se $\theta = \pi$ (e $\theta = 0$)

$0 \leq \theta < 2\pi$