MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

$$V \xrightarrow{T} W \qquad V \text{ e } W \text{ espaços vetoriais}$$

$$T \in L(V,W)$$

Seja $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V

$C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base de W

Para montar a matriz de T em relação às bases B de V e C de W o procedimento é:

Para cada j, $1 \le j \le n$, escreva $T(v_j)$ como combinação linear da base C,

$$T(v_j) = a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_m$$

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ v_j & \longrightarrow & T(v_j) \in W \end{array}$$

Notação: $A = [T]_{B,}$

A matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{1\le i\le \;\; 1\le j}$

é a matriz de T em relação às bases B de V e C de W.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T(v_1) & T(v_2) & & T(v_n) \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Vale que se $v \in V$

$$[T]_{B,C}\,[v]_B = [T(v)]_C$$

$v \in V \qquad [v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ se $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$

$[T(v)]_C = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ se $T(v) = y_1 w + \cdots + y_m w_m$

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

(Essa é a fórmula.)
$A = (a_{ij})$

De fato:

$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$

$T(v) = x_1 T(v_1) + \cdots + x_n T(v_n)$

$= x_1 \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} w_i \right) + x_2 \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i2} w_i \right) + \cdots + x_n \left(\sum_{i=1}^{m} a_{in} w_i \right)$

(*)

$$= \begin{array}{l} x_1 (a_{11} w_1 + \cdots + a_{m1} w_m) + \\ x_2 (a_{12} w_1 + \cdots + a_{m2} w_m) + \cdots + \\ x_n (a_{1n} w_1 + \cdots + a_{mn} w_m) \end{array}$$

$$= \underbrace{(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n})}_{y_1} w_1 + \cdots + \underbrace{(a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn})}_{y_m} w_m$$

$$(*) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right)}_{y_i} w_i$$

$$y_i = [a_{i1} \cdots a_{in}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

TRANSFORMAÇÃO LINEAR COMPOSTA E MATRIZ DA COMPOSTA

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} U$$

$T \in L(V, W)$

$S \in L(W, U)$

V, W, U espaços vetoriais

Sendo S e T transformações lineares, a composta $S \circ T$ é transformação linear

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)).$$

TEOREMA: $\underset{B}{V} \xrightarrow{T} \underset{C}{W} \xrightarrow{S} \underset{D}{U}$

Sejam V, W, U espaços vetoriais, $T \in L(V, W)$ e $S \in L(W, U)$. Sejam B base de V, C base de W e D base de U. Então

$$[S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D}\,[T]_{B,C}.$$

Dem.:

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad C = \{w_1, \dots, w_m\}$

$D = \{u_1, \dots, u_p\}$.

Sejam

$$(a_{ij}) = [T]_{B,C}$$

$$(b_{ij}) = [S]_{C,D}$$

$$(c_{ij}) = [S \circ T]_{B,C}$$

$$(S \circ T)(v_j) = \sum_{i=1}^{p} c_{ij} u_i$$

Queremos calcular c_{ij} e ver que é o produto da linha i de $[S]_{C,D}$ pela coluna j de $[T]_{BC}$.

Escreva

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$S(T(v_j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} S(w_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki} u_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ki}} \right) u_k$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} = \begin{bmatrix} b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

= produto da k-ésima linha de $[S]_{C,D}$ pela j-ésima coluna de $[T]_{B,C}$

Logo $\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} = c_{kj}$.

Assim, $T(v_j) = \sum_{k=1}^{p} c_{kj} u_k$, como queríamos. ∎

Vamos estudar, principalmente, $L(V) = L(V,V)$

$L(V) = L(V,V) = \{T : V \longrightarrow V \mid T \text{ é linear}\}$

operadores lineares em V

Note que $(L(V), +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

Mas nesse espaço vetorial, temos mais uma operação que é a composição de funções.

$$V \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} V$$

$$S \circ T$$

A composição de funções satisfaz:

(1) Associativa $T_1 \circ (T_2 \circ T_3) = (T_1 \circ T_2) \circ T_3$

$\forall\ T_1, T_2$ e T_3 em $L(V)$.

(2) Distributiva

$T_1 \circ (T_2 + T_3) = T_1 \circ T_2 + T_1 \circ T_3$

$(T_1 + T_2) \circ T_3 = T_1 \circ T_3 + T_2 \circ T_3$

(3) $a(T_1 \circ T_2) = (aT_1) \circ T_2 = T_1 \circ (aT_2)$

$\forall\ a \in \mathbb{R}$

Se consideramos $(L(V), +, \cdot, \circ)$ essa estrutura algébrica é chamada de ALGEBRA.

$$\boxed{(L(V), +, \cdot, \circ) \text{ ÁLGEBRA DOS OPERADORES LINEARES em } V.}$$

ATENÇÃO: Em $L(V)$ temos $I_V : V \longrightarrow V$

$T \circ I_V = I_V \circ T = T \quad \forall\ T$ IDENTIDADE $I_V(v) = v$

Exercícios da Lista 6

(7) Prove que são equivalentes $T \in L(V)$

(a) $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$

(b) Se para $v \in V$, $T(T(v)) = 0$ então $T(v) = 0$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Hipótese: $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$

Tese: Se $T(T(v)) = 0 \Rightarrow T(v) = 0$.

Seja $v \in V$ tq $T(T(v)) = 0$.

Então: $\left.\begin{array}{l} T(v) \in \operatorname{Ker} T \\ T(v) \in \operatorname{Im} T \end{array}\right\} \Rightarrow T(v) \in \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Logo $T(v) = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Hipótese: Se $T(T(v)) = 0 \Rightarrow T(v) = 0$.

Seja $v \in \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T$.

Então: $T(v) \in \operatorname{Ker} T$

$\exists\, u \in V$ tal que $v = T(u)$.

Logo $0 = T(v) = T(T(u)) \underset{\text{Hip.}}{\Rightarrow} T(u) = 0$

Logo $v = T(u) = 0$.

7

8. $T \in L(V)$ tal que $T \circ T = T$

Mostrar que $V = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T$.

Temos que provar que:

(1) $V = \operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T$

(2) $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

Seja $v \in V$. Então (1) $v = v - T(v) + T(v)$

$v - T(v) \in \operatorname{Ker} T$, pois

$$T(v - T(v)) \underset{T\text{ linear}}{=} T(v) - \underbrace{T(T(v))}_{T^2(v)} \underset{\text{Hip.}}{=}$$

$$= T(v) - T(v) = 0$$

É claro que $T(v) \in \operatorname{Im} T$.

$$v = \underbrace{v - T(v)}_{\in \operatorname{Ker} T} + \underbrace{T(v)}_{\in \operatorname{Im} T}$$

(2) Seja agora $v \in \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T$.

$\Rightarrow T(v) = 0$ e $\exists\, u \in V$ tq $v = T(u)$.

Mas $0 = T(v) = T(T(u)) \underset{\text{hipótese}}{=} T(u) = v$.

Logo $v = 0$.

Todo operador linear que satisfaz $T^2 = T$ é chamado de operador <u>idempotente</u>.

Exemplo: $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(e_1) = e_1$

$T(e_2) = 0$

$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{11}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(10) $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$S: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

Provar que $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^4$.

$S \circ T$ não é bijetora

Como $\dim \mathbb{R}^4 > \dim \mathbb{R}^3$, $\exists\ v \neq 0$, $v \in \operatorname{Ker} T$

Logo $(S \circ T)(v) = S(T(v)) = S(0) = 0$.

Assim, existe $v \neq 0$, $v \in \operatorname{Ker} S \circ T$.

Agora $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$

podemos tem

$T \circ S$ bijetora e $T \circ S$ não injetora

Exemplos

$S: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ $\quad\quad$ $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$S(e_1) = e_1$ $\quad\quad$ $T(e_1) = e_1$

$S(e_2) = e_2$ $\quad\quad$ $T(e_2) = e_2$

$S(e_3) = e_3$ $\quad\quad$ $T(e_3) = e_3$

$T(e_4) = 0$

$(T \circ S)(xe_1 + ye_2 + ze_3) = T(xe_1 + ye_2 + ze_3 + 0e_4)$

$= xe_1 + ye_2 + ze_3$

$T \circ S$ é a identidade, que obviamente bijetora.

Se T não for injetora, $S \circ T$ não é injetora, pois $0 \neq v \in \operatorname{Ker} T$, $v \in \operatorname{Ker} S \circ T$.
Existem transformações lineares não injetoras de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$,

11: $\dim V < \infty$

$$V = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T \iff \operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T \circ T$$

($\Rightarrow$) Suponha que $v \in \operatorname{Ker} T \circ T$

$$\Rightarrow T(T(v)) = 0 \Rightarrow T(v) \in \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$$

Logo $T(v) = 0$ e $v \in \operatorname{Ker} T$.

Assim, $\operatorname{Ker}(T \circ T) \subset \operatorname{Ker} T$

É claro que $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} T \circ T$.

($\Leftarrow$) Suponha que $\operatorname{Ker} T \circ T = \operatorname{Ker} T$

Se $v \in \operatorname{Ker} T \circ T \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} T$
isto é, $T(T(v)) = 0 \Rightarrow T(v) = 0$.
Pelo exercício 7, $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$.
Pelo Teo do Núcleo e da Imagem
$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$$
Então pela fórmula
$$\dim(\operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T) = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T}_{\dim V} - \dim(\underbrace{\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T}_{0})$$

Então $\dim(\ker T + \operatorname{Im} T) = \dim V \Rightarrow$ 10

$\ker T + \operatorname{Im} T = V$.

12. (a) Verdadeira

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} U$$

Seja $u \in U$. Queremos mostrar que existe $v \in V$ tq $u = S(v)$.

Como $S \circ T$ é sobrej., existe $w \in U$ tq $u = (S \circ T)(w) = S(\underbrace{T(w)}_{v})$

(b) $S \circ T$ sobrejetora $\Rightarrow T$ sobrejetora

FALSA

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^2$$

$T(e_1) = e_1$
$T(e_2) = e_2$

$S(e_1) = e_1$
$S(e_2) = e_2$
$S(e_3) = 0$

T NÃO é sobrej. $\dim \mathbb{R}^3 > \dim \mathbb{R}^2$.

$(S \circ T)(e_i) = e_i$

$S \circ T$ leva base em base.

(c) $S \circ T$ injetora $\Rightarrow S$ injetora

O exemplo de (b) serve aqui também

FALSA

(d) VERDADEIRA

Se T NÃO fosse injetora, existiria $v \neq 0$ tq $T(v) = 0$. Logo, $S(T(v)) = S(0) = 0$. Logo $v \in \ker S \circ T$ absurdo