Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

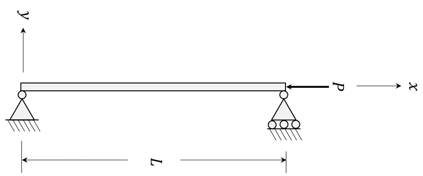
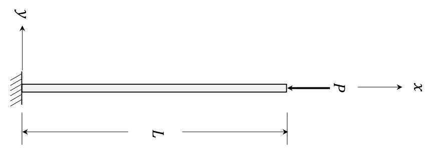
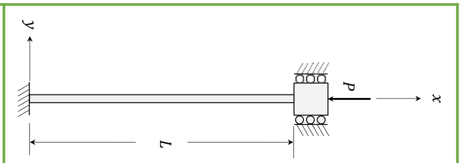
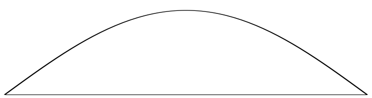
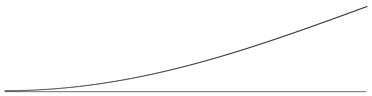
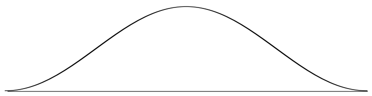
PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #27

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

06/12/2023

Comprimento de flambagem

Tipo			
1º modo			
P_{cr}	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{4\pi^2 EI}{L^2}$
ℓ_f	L	$2L$	$\dfrac{L}{2}$

- Forma geral da carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_f^2}$$

$\ell_f \rightarrow$ comprimento de flambagem (comprimento de uma semionda)

Tensões críticas

- Definição de tensão crítica:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A\ell_f^2}$$

- Raio de giração:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

- Tensão crítica em função do raio de giração:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E i^2}{\ell_f^2}$$

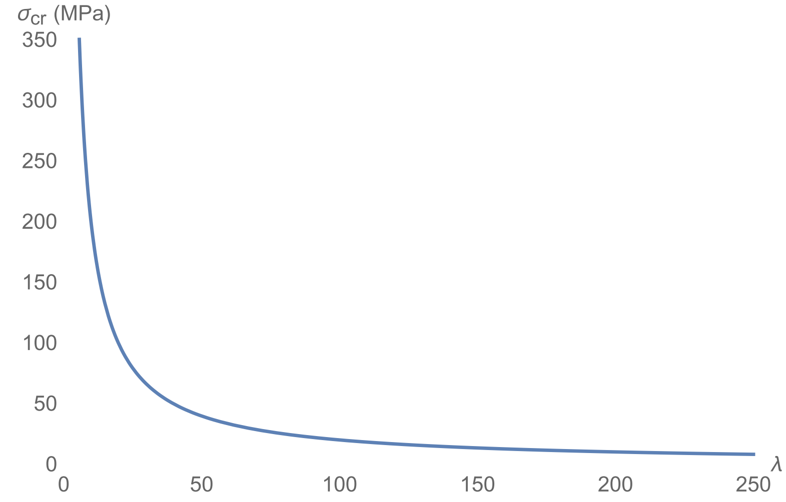
- Índice de esbeltez:

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i}$$

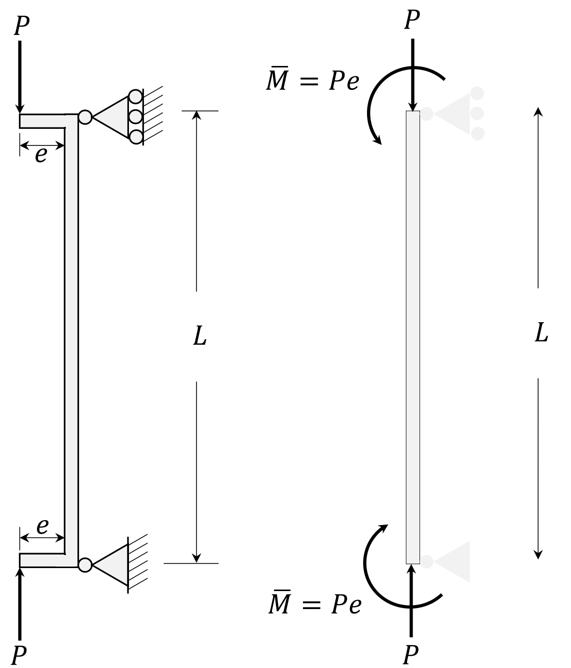
- Tensão crítica em função do índice de esbeltez:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$E = 200\ GPa \qquad \sigma_e = 250\ MPa$$



Colunas com cargas excêntricas



$e \rightarrow$ excentricidade

$$v(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + Cx + D$$

$$\theta(x) = v' = kA \cos kx - kB \operatorname{sen} kx + C$$

$$\frac{M(x)}{EI} = v'' = -k^2 A \operatorname{sen} kx - k^2 B \cos kx$$

$$\frac{V(x)}{EI} = v''' + k^2 v' = k^2 C$$

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow B + D = 0 \;\Rightarrow D = e$$

$$v(L) = 0 \quad \Rightarrow \; A \operatorname{sen} kL + B \cos kL + CL + D = 0$$

$$M(0) = Pe \Rightarrow \; B = -e$$

$$M(L) = Pe \Rightarrow A \operatorname{sen} kL + \; B \cos kL = -e \;\; \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow A = -e \, \frac{1 - \cos kL}{\operatorname{sen} kL} = -e \tan \frac{kL}{2}$$

$$\Rightarrow v(x) = -e \left(\tan \frac{kL}{2} \operatorname{sen} kx + \cos kx - 1 \right)$$

Note que, neste caso, não existe a solução trivial!

Colunas com cargas excêntricas

- Curva de deflexão:

$$v(x) = -e\left(\tan\frac{kL}{2}\,\mathrm{sen}\,kx + \cos kx - 1\right)$$

- A deflexão máxima ocorre no meio do vão:

$$\delta_{máx} = -v\left(\frac{L}{2}\right) = e\left(\tan\frac{kL}{2}\,\mathrm{sen}\frac{kL}{2} + \cos\frac{kL}{2} - 1\right) = e\left(\sec\frac{kL}{2} - 1\right)$$

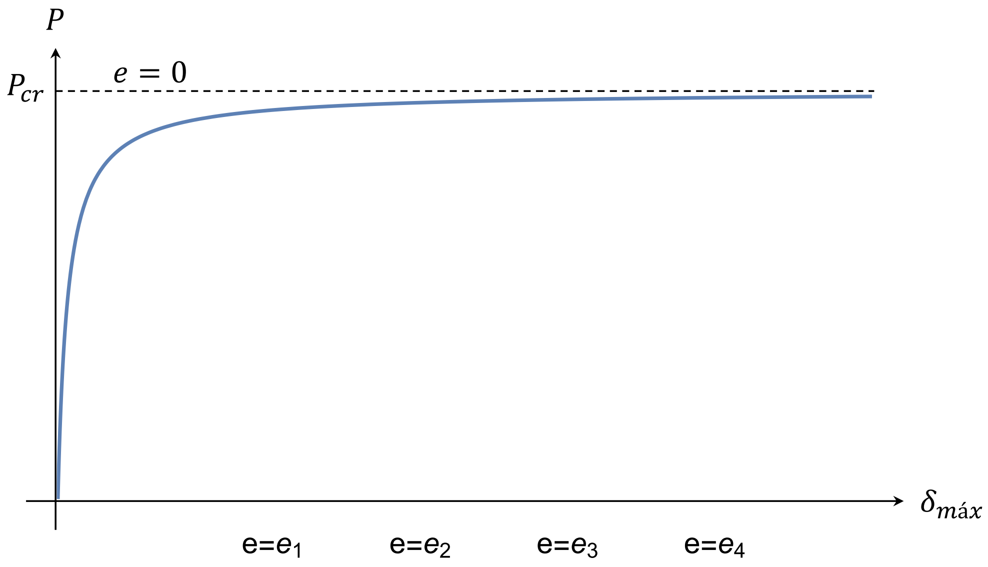
- Em função da carga crítica:

$$\delta_{máx} = e\left(\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right)$$

- Note que para $P \to P_{cr} \Rightarrow \delta_{máx} \to \infty$

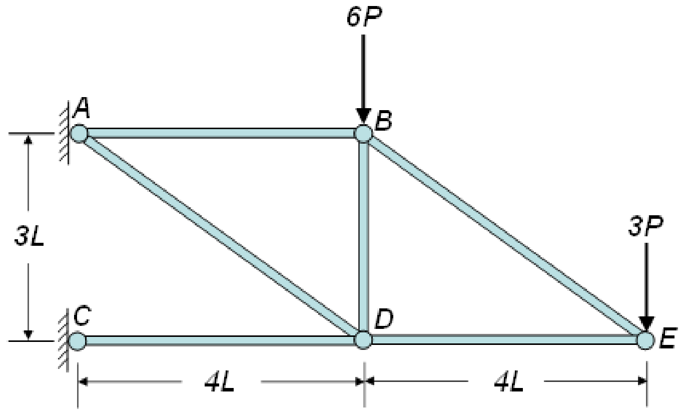
Colunas com cargas excêntricas

$$\delta_{máx} = e\left(\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right)$$



Exercício

Sabendo que na treliça da figura todas as barras são prismáticas e têm a mesma rigidez à flexão EI, pede-se determinar o máximo valor de P de forma a não ocorrer flambagem em nenhuma das barras.



- Carga crítica em cada barra:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

- Forças nas barras

$F_{AB} = 4P$	**tração**
$F_{AD} = 15P$	tração
$F_{CD} = -16P$	compressão
$F_{BD} = -9P$	compressão
$F_{BE} = 5P$	tração
$F_{DE} = -4P$	compressão

- Valores críticos de P em cada barra

  (Só interessam as barras comprimidas)

Barra CD	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{256L^2}$
Barra BD	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{81L^2}$
Barra DE	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{64L^2}$

- Valor crítico de P para toda a treliça:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{256L^2}$$ (é o valor mínimo!)

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo da Flambagem de Barras.* Disponível no Moodle